

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



Д.В. Клименко, С.Є. Тимченко, Ю.М. Головки

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2025

УДК 517.9: 519.46
К49

*Рекомендовано вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка»
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності F1 «Прикладна математика»,
(протокол № 6 від 25.04.2025)*

Рецензенти:

К.Є. Золотько – канд. техн. наук, доц. (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара);

Н.В. Парфінович – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара).

Клименко Д. В.

К49 Рівняння математичної фізики [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Д.В. Клименко, С.Є. Тимченко, Ю.М. Головка ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2025. – 88с.

Подано теоретичні основи дисципліни «Рівняння математичної фізики». Розглянуто методи розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними, наведено значну кількість розв'язаних задач. Містить індивідуальні завдання для перевірки знань, завдання для самостійного виконання, умови задач для самоконтролю.

Для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності F1 Прикладна математика. Може стати в пригоді здобувачам вищої освіти галузі знань F Інформаційні технології.

УДК 517.9: 519.46

© Д.В. Клименко, С.Є. Тимченко, Ю.М. Головка, 2025

© НТУ «Дніпровська політехніка», 2025

Зміст

ПЕРЕДМОВА.....	4
Рівняння з частинними похідними.....	6
Тема 1. Розв'язування найпростіших рівнянь з частинними похідними.....	10
Індивідуальне завдання 1.....	18
Тема 2. Визначення типу диференціальних рівнянь 2-го порядку. Алгоритм визначення типу рівняння 2-го порядку.....	23
Індивідуальне завдання 2.....	25
Тема 3. Алгоритм зведення диференціального рівняння з частинними похідними 2-го порядку до канонічного вигляду.....	27
Задачі для самоконтролю.....	33
Рівняння коливань струни.....	36
Тема 4. Метод д'Аламбера для розв'язування диференціального рівняння з частинними похідними коливань струни. Постановка задач математичної фізики. Рівняння гіперболічного типу: рівняння коливань струни.....	37
Задачі для самоконтролю.....	42
Завдання для самостійного виконання.....	43
Тема 5. Рівняння гіперболічного типу: рівняння коливань струни. Розв'язування рівняння коливань струни методом Фур'є.....	44
Індивідуальне завдання 3.....	47
Тема 6. Розв'язування рівняння коливань струни методом Фур'є. Стоячі хвилі.....	49
Завдання для самостійного виконання.....	53
Тема 7. Рівняння гіперболічного типу. Неоднорідні рівняння. Метод Фур'є.....	54
Завдання для самостійного виконання.....	58
Тема 8. Застосування методу Фур'є для неоднорідного рівняння гіперболічного типу.....	60
Завдання для самостійного виконання.....	63
Тема 9. Рівняння параболічного типу. Рівняння теплопровідності.....	64
Тема 10. Перша крайова задача для рівняння теплопровідності на відріжку $[0, l]$. Метод Фур'є.....	66
Завдання для самостійного виконання.....	69
Тема 11. Неоднорідне рівняння теплопровідності	71
Завдання для самостійного виконання.....	72
Тема 12. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності на відріжку $[0, l]$	73
Завдання для самостійного виконання.....	77
Тема 13. Поширення тепла на нескінченну пряму.....	78
Тема 14. Рівняння еліптичного типу. Рівняння Лапласа і Пуассона. Метод Фур'є для рівняння Лапласа. Задача Діріхле для кола.....	81
Література.....	87

ПЕРЕДМОВА

Коло питань, що розглядає математична фізика, стосується вивчення і аналізу різноманітних фізичних процесів, це є складовою частиною прикладної математики. Дисципліна приділяє увагу явищам, що вивчаються в електродинаміці, теорії електричних кіл, теорії зв'язку, цифровій обробці сигналів тощо. Виникають математичні задачі, що ведуть до створення рівнянь з частинними похідними першого або другого порядку, зокрема, з певними умовами у відомих областях площини та простору, розв'язуванню яких присвячено багато часу в дисципліні «Рівняння математичної фізики».

Мета дисципліни «Рівняння математичної фізики» – це формування системи знань, умінь і навиків, корисних і необхідних в майбутній практично-науковій професійній діяльності, серед яких вміння будувати математичні моделі процесів різної природи у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП) 2-го порядку; здатність розв'язувати та досліджувати задачі Коші, крайові задачі, давати аналіз одержаних результатів та їх фізичну інтерпретацію; формування навиків самостійної роботи з науковою літературою, володіння методами дослідження. Досягти поставленої мети можна, використовуючи теоретичний і практичний матеріали цього навчального посібника. Також його зміст сприяє в здобувачів таких умінь: 1) побудувати розв'язки деяких типів лінійних ДРЧП другого порядку; знайти розв'язки задач Коші, крайових задач для ДРЧП та їх обґрунтування; 2) самостійно розв'язати задачі теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними у рамках обмеженого часу, розвиваючи професійну сумлінність.

Поданий матеріал розподілено на 14 тем відповідно до типу ДРЧП. Особлива увага приділяється математичній постановці задач, ретельному розгляду розв'язувань задач.

В основу матеріалу посібника покладені лекції, що читалися авторами на факультеті інформаційних технологій в НТУ «Дніпровська політехніка».

Наприкінці посібника є список рекомендованих джерел, що може бути корисним при вивченні та засвоєнні запропонованих тем.

Рівняння з частинними похідними

Диференціальним рівнянням m -го порядку з частинними похідними (ДРЧП) називається рівняння, що містить хоча б одну частинну похідну m -го порядку і не містить похідних вищих порядків.

У загальному випадку ДРЧП m -го порядку має вигляд

$$F\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2} \dots \partial x_n^{\gamma_n}}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u, x_1, \dots, x_n\right) = 0,$$

де $\sum_1^n \alpha_i = m$, $\sum_1^n \beta_i = m$, $\sum_1^n \gamma_i = m-1$. Невідома функція $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$

визначена в деякій області $D \subset R^n$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$.

Класичним розв'язком цього рівняння будемо називати функцію $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що при підстановці в ДРЧП буде перетворювати його в тотожність. Ця функція має бути диференційованою m разів.

ДРЧП називається лінійним, якщо функція F є лінійною щодо всіх частинних похідних шуканої функції та самої шуканої функції. В іншому випадку рівняння називається нелінійним. ДРЧП називається **квазілінійним**, якщо **функція F є лінійною** щодо старшої частинної похідної шуканої функції.

Частинним розв'язком ДРЧП називається розв'язок, що задовольняє додатковим умовам, що називаються крайовими умовами.

Задачі з пошуку розв'язку ДРЧП, що задовольняє крайовим умовам, називаються крайовими задачами математичної фізики.

Основні рівняння математичної фізики.

1. $\Delta u = 0$, де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ – оператор Лапласа, називається

рівнянням Лапласа.

2. $\Delta u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – **рівняння Пуассона.**

3. $\Delta u - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ – **рівняння теплопровідності.**

4. $\Delta u - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ – хвильове рівняння.

Хвильове рівняння описує рух хвиль в середовищі без опору.

5. $\Delta u - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + cu = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ – телеграфне рівняння, де a, b, c

– деякі дійсні числа. Це рівняння описує рух хвиль в середовищі з опором.

$$6. \quad \Delta u + k^2 u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \begin{cases} \text{рівняння Гельмгольца, якщо } k \in \mathbb{R}, \\ \text{рівняння Шредингера, якщо } k \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння з частинними похідними 1-ого порядку

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (1.1)$$

де $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – невідома функція, що визначена в деякій області $D \subset R^n$ (тобто $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$).

Щоб знайти загальний інтеграл даного диференціального рівняння, треба розглянути наступні рівності або систему рівнянь

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}. \quad (1.2)$$

Далі отримуємо

$$\begin{cases} \psi_1(x_1,x_2,...,x_n)=C_1, \\ \psi_2(x_1,x_2,...,x_n)=C_2, \\ ,\\ \psi_{n-1}(x_1,x_2,...,x_n)=C_{n-1} \end{cases}$$

Загальний інтеграл даного диференціального рівняння має вигляд $u = \Phi(C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$, де $C_1, C_2, \dots, C_{n-1} = \text{const}$ [1], [2], [3], [4].

Покажемо, що між функцією $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – розв’язком рівняння (1.1) з частинними похідними і загальним інтегралом рівнянь (1.2) існує певний зв’язок. Загальний інтеграл звичайного диференціального рівняння 1-ого порядку зі змінними x і y – це його загальний розв’язок неявного виду $\Phi(x, y, C) = 0$.

Останню рівність можна записати $\psi(x, y) = C$, якщо припустити розв'язність щодо сталої інтегрування C . Припускається, що функції Φ і ψ диференційовані.

Система рівнянь (1.2) складається з $(n-1)$ диференціальних рівнянь, які можна записати таким чином ($X_1 \neq 0$)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2}{X_1}, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{X_3}{X_1}, \dots, \quad \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{X_n}{X_1} \quad (1.3)$$

Система рівнянь (1.3) і еквівалентна їй система рівнянь (1.2) має $(n-1)$ загальних інтегралів

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2, \\ , \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_{n-1} \end{cases}, \quad (1.4)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ – довільні сталі, а функції $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ незалежні між собою.

Сукупність рівностей (1.4) є загальним інтегралом системи рівнянь (1.2)

$$u = \Phi(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}).$$

Повний диференціал функції u має вигляд

$$du = d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n \equiv 0 \quad (1.5)$$

при фіксованих значеннях $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ в рівностях (1.4). Користуючись (1.3),

маємо $dx_i = \frac{X_i}{X_1} dx_1$, $i = \overline{2, n}$. Підставляємо $dx_i, i = \overline{2, n}$, у (1.5) скорочуємо на dx_1 ,

МАЄМО ТОТОЖНІСТЬ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \cdot \frac{X_2}{X_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \cdot \frac{X_3}{X_1} \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \cdot \frac{X_n}{X_1} \equiv 0.$$

Умножаємо на X_1 ліву та праву частину останньої тотожності, маємо

$$X_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + X_3 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \dots + X_n \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \equiv 0. \quad (1.6)$$

Так як $u=\Phi$, тоді ліві частини (1.1) та (1.6) співпадають. Отже, будь-який загальний інтеграл системи рівнянь (1.2) або (1.3) задовольняє рівнянню (1.1), тобто є його розв'язком.

Правильно й зворотне: будь-який розв'язок рівняння (1.1) є загальним інтегралом системи рівнянь (1.2). Покажемо це. Нехай $u = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ – розв'язок рівняння (1.1), тоді має місце тотожність (1.6). Використовуючи (1.3) для (1.6), маємо

$$X_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_1 \cdot \frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + X_1 \cdot \frac{dx_3}{dx_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \dots + X_n \cdot \frac{dx_n}{dx_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \equiv 0.$$

Ділимо на X_1 , помножаємо на dx_1 ліву та праву частини останньої тотожності,

$$\text{маємо } \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n \equiv 0. \text{ Тобто } \Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \text{const}.$$

Система рівнянь (1.2) відокремлює в області D множину точок, координати яких пов'язані між собою рівностями (1.2). Навпаки: якщо за рахунок цих зв'язків $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \text{const}$, тоді $u = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ є інтегралом системи рівнянь (1.2).

Розглянемо квазілінійне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = X_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u),$$

де $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – невідома функція, що визначена в деякій області $D \subset R^n$ (тобто $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$).

Щоб знайти загальний інтеграл цього диференціального рівняння треба розглянути наступні рівності

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{X_{n+1}}. \quad (1.7)$$

Якщо функція, що розташована в правій частині, не залежить від невідомої функції u , тобто $X_{n+1} = X_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то вказане рівняння можна розглядати

Далі отримуємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(x_1,x_2,...,x_n,u) = C_1, \\ \psi_2(x_1,x_2,...,x_n,u) = C_2, \\ , \\ \psi_n(x_1,x_2,...,x_n,u) = C_n \end{array} \right.$$

Загальний інтеграл даного диференціального рівняння має вигляд $u = F(C_1, C_2, \dots, C_n)$, де $C_1, C_2, \dots, C_n = \text{const}$ [1], [2], [3], [4].

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad u = u(x, y).$$

Розв'язування: Помножаємо ліву і праву частину на диференціал dx , далі інтегруємо за змінною x

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} dx &= y dx, \\ \int \frac{\partial u}{\partial x} dx &= \int y dx, \\ u(x, y) &= xy + C(y),\end{aligned}$$

де $C(y)$ – деяка функція.

Відповідь: $u(x, y) = xy + C(y)$, де $C(y)$ – деяка функція.

2. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + x \cdot u = y, \quad u = u(x, y).$$

Розв'язування: розглянемо відповідне однорідне рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial u}{\partial y} + x \cdot u = 0,$$

розв'яжемо це рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x \cdot u,$$

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} dy = -x dy,$$

$$\int \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} dy = - \int x dy,$$

$$\ln|u| = -xy + \ln|C_1(x)|, \text{ де } C_1(x) - \text{деяка функція,}$$

$$u(x, y) = C_1(x) \cdot e^{-xy}.$$

Тоді загальний розв'язок початкового рівняння будемо шукати у вигляді

$u(x, y) = C_1(x, y) \cdot e^{-xy}$, де $C_1(x)$ – деяка функція вже від двох змінних.

Підставляємо функцію $u(x, y)$ в початкове рівняння, маємо

$$\frac{\partial C_1(x, y)}{\partial y} \cdot e^{-xy} + C_1(x, y) \cdot e^{-xy} \cdot (-x) + x \cdot C_1(x, y) \cdot e^{-xy} = y,$$

$$\frac{\partial C_1(x, y)}{\partial y} = y \cdot e^{xy},$$

$$\frac{\partial C_1(x, y)}{\partial y} dy = y \cdot e^{xy} dy,$$

$$\int \frac{\partial C_1(x, y)}{\partial y} dy = \int y \cdot e^{xy} dy,$$

$$C_1(x, y) = \frac{y}{x} e^{xy} - \frac{1}{x} \cdot \int e^{xy} dy + C_2(x),$$

$$C_1(x, y) = \frac{y}{x} e^{xy} - \frac{1}{x^2} \cdot e^{xy} + C_2(x), \text{ де } C_2(x) - \text{деяка функція,}$$

$$C_1(x, y) = \frac{e^{xy}}{x} \cdot \left(y - \frac{1}{x} \right) + C_2(x).$$

$$\text{Отримаємо } u(x, y) = \left(\frac{e^{xy}}{x} \cdot \left(y - \frac{1}{x} \right) + C_2(x) \right) \cdot e^{-xy}.$$

Відповідь: загальний розв'язок даного рівняння з частинними похідними має вигляд

$$u(x, y) = \frac{1}{x} \cdot \left(y - \frac{1}{x} \right) + C_2(x) \cdot e^{-xy}, \text{ де } C_2(x) - \text{деяка функція.}$$

3. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y, \quad u = u(x, y).$$

Розв'язування:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dy = (x + y) dy,$$

$$\int \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy = \int (x + y) dy,$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = xy + \frac{y^2}{2} + C_1(x), \text{ де } C_1(x) - \text{деяка функція,}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx = \left(xy + \frac{y^2}{2} + C_1(x) \right) dx,$$

$$\int \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx = \int \left(xy + \frac{y^2}{2} + C_1(x) \right) dx,$$

$$u(x, y) = \frac{x^2 \cdot y}{2} + \frac{x \cdot y^2}{2} + \int C_1(x) dx + C_2(y), \text{ де } C_2(y) - \text{деяка функція,}$$

$$u(x, y) = \frac{xy}{2} \cdot (x + y) + \psi_1(x) + C_2(y), \text{ де } \psi_1(x) = \int C_1(x) dx.$$

Відповідь: $u(x, y) = \frac{xy}{2} \cdot (x + y) + \psi_1(x) + C_2(y)$, де $\psi_1(x) = \int C_1(x) dx$, $C_1(x)$, $C_2(y)$ – деякі функції.

4. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \cdot u = 0, \quad u = u(x, y).$$

Розв'язування: розглянемо відповідне характеристичне рівняння

$$k^2 + 4 = 0,$$

$$k_{1,2} = \pm 2i,$$

$$u(x, y) = C_1(y) \cdot \cos 2x + C_2(y) \cdot \sin 2x, \text{ де } C_1(y), C_2(y) - \text{деякі функції.}$$

Відповідь: загальний розв'язок цього рівняння з частинними похідними має вигляд $u(x, y) = C_1(y) \cdot \cos 2x + C_2(y) \cdot \sin 2x$, де $C_1(y)$, $C_2(y)$ – деякі функції.

5. Розв'язати рівняння:

$$\cos y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \ln y \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = u(x, y).$$

Розв'язування: маємо лінійне однорідне рівняння з частинними похідними

$$\cos y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \ln y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Використовуємо рівності (1.7) для розв'язування рівняння

$$\begin{aligned}\frac{dx}{\cos y} &= \frac{dy}{-\ln y}, \\ dx &= \frac{\cos y \cdot dy}{-\ln y}, \\ \int dx &= \int \frac{\cos y \cdot dy}{-\ln y}, \\ x &= \int \frac{\cos y \cdot dy}{-\ln y} + C_1, \\ C_1 &= x + \int \frac{\cos y \cdot dy}{\ln y}.\end{aligned}$$

Отже, загальний інтеграл цього рівняння має вигляд

$$u(x, y) = \Phi(C_1) = \Phi\left(x + \int \frac{\cos y \cdot dy}{\ln y}\right).$$

$$\text{Відповідь: } u(x, y) = \Phi\left(x + \int \frac{\cos y \cdot dy}{\ln y}\right).$$

6. Розв'язати рівняння:

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 + 1, \quad z = z(x, y).$$

Розв'язування: Використовуємо рівності (1.7) для розв'язування рівняння

$$\begin{aligned}\frac{dx}{y} &= \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z^2 + 1}, \\ dx &= \frac{y \cdot dy}{x}, \\ dx + dy &= \frac{ydy}{x} + dy, \\ dx + dy &= \frac{(x + y)dy}{x}, \\ \frac{dx + dy}{x + y} &= \frac{dy}{x}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}\frac{dx + dy}{x + y} &= \frac{dz}{z^2 + 1}, \\ \ln|x + y| &= \arctgz + C_1, \\ f_1(x, y, z) : \ln|x + y| - \arctgz &= C_1.\end{aligned}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} dx - dy &= \frac{ydy}{x} - dy, \\ dx - dy &= \frac{-(x-y)dy}{x}, \\ -\frac{dx - dy}{x-y} &= \frac{dy}{x}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} -\frac{dx - dy}{x - y} &= \frac{dz}{z^2 + 1}, \\ -\ln|x - y| &= \arctg z + C_2, \\ f_2(x, y, z) : \ln \frac{1}{|x - y|} - \arctg z &= C_2. \end{aligned}$$

З'ясуємо, чи лінійно незалежні функції $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$. Використовуємо визначники Вронського, які не повинні дорівнювати 0

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x+y} & -\frac{1}{z^2+1} \\ \frac{1}{x-y} & -\frac{1}{z^2+1} \end{vmatrix} = \frac{2y}{(z^2+1)(x^2-y^2)} \neq 0, \text{ якщо } y \neq 0,$$

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x+y} & \frac{1}{x+y} \\ -\frac{1}{x-y} & \frac{1}{x-y} \end{vmatrix} = \frac{2}{(x^2-y^2)} \neq 0,$$

за аналогією обчислення визначників $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, z)} \neq 0$.

Вирази для визначників $\frac{D(f_1, f_2)}{D(y, z)}$, $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}$, $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, z)}$ мають сенс при $x^2 - y^2 \neq 0$.

Маємо загальний інтеграл щодо цього рівняння з частинними похідними

$$F\left(\ln|x+y| - \arctg z, \ln \frac{1}{|x-y|} - \arctg z\right) = 0.$$

$$\text{Відповідь: } F\left(\ln|x+y| - \arctg z, \ln \frac{1}{|x-y|} - \arctg z\right) = 0.$$

7. Розв'язати рівняння:

$$(z^2 + x^2 - y^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - 2xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2yz = 0, \quad z = z(x, y).$$

Розв'язування: Використовуємо рівності (1.7) для розв'язування рівняння

$$-2xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 + x^2 - y^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -2yz,$$

Маємо

$$\frac{dx}{-2xy} = \frac{dy}{z^2 + x^2 - y^2} = \frac{dz}{-2yz},$$

$$\frac{xdx}{-2x^2y} = \frac{zdz}{-2yz^2},$$

$$xdx = \frac{2x^2 yzdz}{2yz^2},$$

$$xdx + zdz = \frac{x^2 yzdz}{yz^2} + zdz,$$

$$xdx + zdz = \left(\frac{x^2 y}{yz^2} + 1 \right) zdz,$$

$$xdx + zdz = \frac{x^2 y + yz^2}{yz^2} zdz,$$

$$\frac{xdx + zdz}{x^2 + z^2} = \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{xdx + zdz}{x^2 + z^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + z^2) = \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|C_1|, \text{ де } C_1 - \text{ стала,}$$

$$x^2 + z^2 = C_1 \cdot x^2,$$

$$1 + \frac{z^2}{x^2} = C_1,$$

$$F_1(x, z) : 1 + \frac{z^2}{x^2} = C_1.$$

Або $f_1(x, z) : \frac{z}{x} = C_3$, де $C_3 = (C_1 - 1)^{1/2}$.

$$xdx = \frac{x^2 \cdot dz}{z}, \quad ydy = \frac{yz^2 + yx^2 - y^3}{-2yz} dz.$$

$$\text{Шукаємо } xdx + ydy + zdz = \frac{x^2 \cdot dz}{z} + \frac{yz^2 + yx^2 - y^3}{-2yz} dz + zdz =$$

$$= \frac{-2x^2 + z^2 + x^2 - y^2 - 2z^2}{-2z} dz = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2z} dz.$$

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dz}{2z} = \frac{dx}{2x},$$

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dx}{2x},$$

$$\int \frac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2} = \int \frac{dx}{2x},$$

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln|x| + \ln|C_2|, \text{ де } C_2 - \text{ стала,}$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) = C_2 \cdot x,$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = C_2.$$

$$f_2(x, y, z): \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = C_2.$$

З'ясуємо, чи лінійне незалежні функції $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$. Використовуємо визначники Вронського, які не повинні дорівнювати 0

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2y}{x} \\ \frac{1}{x} & \frac{2z}{x} \end{vmatrix} = -\frac{2y}{x^2} \neq 0, \quad \frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} -\frac{z}{x^2} & 1 - \frac{y^2 + z^2}{x^2} \\ 0 & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = -\frac{2yz}{x^3} \neq 0,$$

за аналогією обчислення визначників $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, z)} \neq 0$. Вирази для визначників

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(y, z)}, \frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}, \frac{D(f_1, f_2)}{D(x, z)} \text{ мають сенс при } x \neq 0.$$

Маємо загальний інтеграл щодо цього рівняння з частинними похідними

$$F\left(\frac{z}{x}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x}\right) = 0.$$

$$\text{Відповідь: } F\left(\frac{z}{x}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x}\right) = 0.$$

8. Знайти функцію $z = z(x, y)$, що задовольняє умовам

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy,$$

$$\text{при } y=1 \quad z(x) = x^2.$$

Розв'язування: Використовуємо рівності (1.7) для розв'язування рівняння

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2xy},$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y}, \\ \ln|x| &= \ln|y| + \ln|C_1|, \text{ де } C_1 - \text{ стала,} \\ x &= C_1 \cdot y, \\ \frac{x}{y} &= C_1.\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}dy &= \frac{dz}{2C_1 \cdot y}, \\ 2C_1 \cdot y dy &= dz, \\ C_1 \cdot y^2 &= z + C_2, \text{ де } C_2 - \text{ стала,} \\ C_1 \cdot y^2 - z &= C_2, \\ \frac{x}{y} \cdot y^2 - z &= C_2, \\ xy - z &= C_2.\end{aligned}$$

З'ясуємо, чи лінійне незалежні вирази $\frac{x}{y}$, $xy - z$. Використовуємо визначники

Вронського, які не повинні дорівнювати 0 $\frac{D\left(\frac{x}{y}, xy - z\right)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} -\frac{x}{y^2} & x \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{x}{y^2} \neq 0,$

$$\frac{D\left(\frac{x}{y}, xy - z\right)}{D(x, z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & y \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{y} \neq 0,$$

$$\frac{D\left(\frac{x}{y}, xy - z\right)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & y \\ -\frac{x}{y^2} & x \end{vmatrix} = \frac{2x}{y} \neq 0. \text{ Визначники не дорівнюють 0, коли } x \neq 0.$$

Вирази для визначників $\frac{D(f_1, f_2)}{D(y, z)}$, $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}$, $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, z)}$ мають сенс при $y \neq 0$.

Отже, загальний інтеграл цього рівняння з частинними похідними має вигляд

$$F\left(\frac{x}{y}, xy - z\right) = 0. \text{ Введемо позначення } \psi_1 = \frac{x}{y}, \quad \psi_2 = xy - z.$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші. При $y=1$ $\overline{\psi_1} = x$, $\overline{\psi_2} = x - z$. Тоді з урахуванням, що $z = x^2$, отримаємо $\psi_1 - \psi_2 = \psi_1^2$. Звідси $\psi_1 - \psi_2 - \psi_1^2 = 0$.

Розв'язок задачі Коші має вигляд $\frac{x}{y} - xy + z - \frac{x^2}{y^2} = 0$.

Відповідь: загальний інтеграл цього рівняння з частинними похідними має вигляд $F\left(\frac{x}{y}, xy - z\right) = 0$. Розв'язок задачі Коші має вигляд $\frac{x}{y} - xy + z - \frac{x^2}{y^2} = 0$.

Індивідуальне завдання 1

Варіант 1

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 3x - \frac{y^2}{x}, \quad u = u(x, y).$$

2. Розв'язати рівняння:

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z + x \cdot y, \quad z = z(x, y).$$

3. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\ln y}{x} - \frac{\ln x}{y}, \quad u = u(x, y).$$

4. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, y), \quad a - \text{число}.$$

5. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\operatorname{tg} y}{x} + x^2 y^2, \quad u = u(x, y).$$

6. Розв'язати рівняння:

$$2x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = u(x, y).$$

7. Розв'язати рівняння:

$$\cos y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \sin y \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = u(x, y).$$

8. Розв'язати рівняння:

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad z = z(x, y).$$

9. Розв'язати рівняння:

$$\frac{1}{2} \cdot (z^2 + x^2 - y^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + yz = 0, \quad z = z(x, y).$$

10. Знайти функцію $z = z(x, y)$, що задовольняє умовам

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z,$$

при $y = 0,5 \quad z = \frac{1}{x}.$

Варіант 2

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 3y - \frac{x^2}{y}, \quad u = u(x, y).$$

2. Розв'язати рівняння:

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2z - x \cdot y, \quad z = z(x, y).$$

3. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\ln y}{x^2} - \frac{\ln x}{y^3}, \quad u = u(x, y).$$

4. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 4u = 0, \quad u = u(x, y).$$

5. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\operatorname{ctgy}}{x^4} + xy, \quad u = u(x, y).$$

6. Розв'язати рівняння:

$$\frac{x^3}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = u(x, y).$$

7. Розв'язати рівняння:

$$\sin y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = u(x, y).$$

8. Розв'язати рівняння:

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z^2, \quad z = z(x, y).$$

9. Розв'язати рівняння:

$$(z^2 + x^2 + 3y^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 2xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2yz, \quad z = z(x, y).$$

10. Знайти функцію $z = z(x, y)$, що задовольняє умовам

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 y,$$

при $y = 2 \quad z = 2x^2$.

Варіант 3

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \ln y - \frac{y}{x^2}, \quad u = u(x, y).$$

2. Розв'язати рівняння:

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z - x \cdot y, \quad z = z(x, y).$$

3. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\sin y}{x} - \frac{\cos x}{y}, \quad u = u(x, y).$$

4. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0, \quad u = u(x, y).$$

5. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\arctg y}{x} + x + y, \quad u = u(x, y).$$

6. Розв'язати рівняння:

$$5x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x, 0) = -\frac{1}{\ln x}, \quad u'_y(1, y) = 0, 2.$$

7. Розв'язати рівняння:

$$x^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = y^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = u(x, y).$$

8. Розв'язати рівняння:

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z, \quad z = z(x, y).$$

9. Розв'язати рівняння:

$$(z^2 + x^2 + 4y^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 3xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 3yz, \quad z = z(x, y).$$

10. Розв'язати рівняння:

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 15xy, \quad z = z(x, y).$$

Варіант 4

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y - \ln x, \quad u = u(x, y).$$

2. Розв'язати рівняння:

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z - \sin^2 x \cdot y, \quad z = z(x, y).$$

3. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{y}{x+y} - \frac{x}{y-1}, \quad u = u(x, y).$$

4. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} + 6u = 0, \quad u = u(x, y).$$

5. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin y}{x^2} + x - 10y, \quad u = u(x, y).$$

6. Розв'язати рівняння:

$$(6x+1) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = u(x, y).$$

7. Розв'язати рівняння:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = u(x, y).$$

8. Розв'язати рівняння:

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \cos z, \quad z = z(x, y).$$

9. Розв'язати рівняння:

$$(4z^2 + 4x^2 - 4y^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 8xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 8yz, \quad z = z(x, y).$$

10. Розв'язати рівняння:

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy, \quad z = z(x, y).$$

Варіант 5

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos^2 y - \sin x, \quad u = u(x, y).$$

2. Розв'язати рівняння:

$$x^3 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z - e^{\frac{y}{x^3}} \cdot y, \quad z = z(x, y).$$

3. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{y}{(x+y)^2} - \frac{x}{(y-1)^3}, \quad u = u(x, y).$$

4. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 4, \quad u = u(x, y).$$

5. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + 1} + x^5 - 25y, \quad u = u(x, y).$$

6. Розв'язати рівняння:

$$7x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = u(x, y).$$

7. Розв'язати рівняння:

$$\frac{1}{y^5} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x^5} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = u(x, y).$$

8. Розв'язати рівняння:

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 1 + z^2, \quad z = z(x, y).$$

9. Розв'язати рівняння:

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \left(z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = u(x, y, z).$$

10. Розв'язати рівняння:

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z^2, \quad z = z(x, y).$$

Тема 2. Визначення типу диференціальних рівнянь 2-го порядку. Алгоритм визначення типу рівняння 2-го порядку

1) Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними

$$a \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0, \quad (2.1)$$

де $a = a(x, y, z)$; $b = b(x, y, z)$; $c = c(x, y, z)$.

2) Шукаємо визначник $\Delta = b^2 - ac$.

3) Якщо в деякій області D

$\Delta > 0$, то диференціальне рівняння з частинними похідними в цій області належить до гіперболічного типу;

$\Delta = 0$, то диференціальне рівняння з частинними похідними в цій області належить до параболічного типу;

$\Delta < 0$, то диференціальне рівняння з частинними похідними в цій області належить до еліптичного типу.

Приклад 1. Для заданого диференціального рівняння з частинними похідними

визначити тип: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2x - x^2 y = 0$.

Розв'язання: В заданому диференціальному рівнянні з частинними похідними $a = 1$, $2b = 4 \Rightarrow b = 2$, $c = 1$.

$$\Delta = - \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 4) = 3.$$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ задане диференціальне рівняння з частинними похідними належить до гіперболічного типу $\forall x, \forall y$.

Приклад 2. Для заданого диференціального рівняння з частинними похідними

визначити тип: $x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$.

Розв'язання: В заданому диференціальному рівнянні з частинними похідними $a(x, y) = x$; $b = 0$; $c(x, y) = y$.

$$\Delta = - \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} = -x \cdot y.$$

1) $\Delta > 0$ якщо $x < 0$, $y > 0$ або $x > 0$, $y < 0$.

$D := \{x < 0, y > 0\} \cup \{x > 0, y < 0\}$. Диференціальне рівняння з частинними похідними в області D належить до гіперболічного типу.

2) $\Delta < 0$ якщо $x > 0$, $y > 0$ або $x < 0$, $y < 0$.

$D_1 := \{x > 0, y > 0\} \cup \{x < 0, y < 0\}$. Диференціальне рівняння з частинними похідними в області D_1 належить до еліптичного типу.

Якщо треба визначити тип диференціального рівняння з частинними похідними 2-го порядку, але подане диференціальне рівняння не має вигляду (2.1), то треба задане диференціальне рівняння з частинними похідними звести до канонічного вигляду.

Перший варіант зведення цього диференціального рівняння з частинними похідними 2-го порядку до класичного вигляду – вздовж розв'язку цього диференціального рівняння.

Приклад 3. Вздовж відповідних розв'язків $u(x, y)$ визначити тип рівняння

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\right) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2, \quad u(x, y) = x^2 + y^2.$$

Розв'язання: Шукаємо функції $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2.$$

$$\text{Отже, маємо } 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad \Delta = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Вздовж розв'язка $u(x, y) = x^2 + y^2$ диференціальне рівняння з частинними похідними 2-го порядку має гіперболічний тип.

Індивідуальне завдання 2

Задача 1. Для заданих рівнянь визначити тип:

- 1) $x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$
- 2) $2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = u;$
- 3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = xy^2 - 3u;$
- 4) $4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2u = 0;$
- 5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$
- 6) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - u = 0;$
- 7) $y^{2m+1} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - u = 0, \quad m \in \mathbb{Z};$
- 8) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$
- 9) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \cdot e^{x-y} = 0.$

Задача 2. Визначити тип диференціального рівняння з частинними похідними 2-го порядку

- 1) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 = 8, \text{ вздовж розв'язку } u(x, y) = x^2 + y^2.$
- 2) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 = 8, \text{ вздовж розв'язку } u(x, y) = 2\sqrt{2} \cdot xy.$
- 3) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 = 0, \text{ вздовж розв'язку } u(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{17}{6} \cdot xy.$

$$4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ вздовж розв'язку } u(x, y) = 2y^2.$$

$$5) \quad 3 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - 6 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \text{вздовж} \quad \text{розв'язку}$$

$$u(x, y) = x^2 + 2xy.$$

$$6) \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 2(x + y) + 8, \text{ вздовж розв'язку } u(x, y) = x^2 + 2xy$$

.

$$7) \quad 2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 - 3 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2x = 0, \quad \text{вздовж} \quad \text{розв'язку}$$

$$u(x, y) = xy - \frac{1}{2}x^2.$$

$$8) \quad 5 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^5 - 7 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 25 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 150y, \quad \text{вздовж} \quad \text{розв'язку}$$

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^3 + \frac{5}{7}xy.$$

$$9) \quad 5 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 = 12, \text{ вздовж розв'язку } u(x, y) = \sqrt{3} \cdot x^2 y.$$

Тема 3. Алгоритм зведення диференціального рівняння з частинними похідними 2-го порядку до канонічного вигляду

Розглянемо рівняння

$$a \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0, \quad (3.1)$$

де $a = a(x, y, z)$; $b = b(x, y, z)$; $c = c(x, y, z)$.

Визначимо тип даного диференціального рівняння з частинними похідними (3.1). Складемо рівняння характеристик для заданого рівняння

$$a dy^2 - 2b dx dy + c dx^2 = 0, \quad (3.2)$$

де $a = a(x, y, z)$, $b = b(x, y, z)$, $c = c(x, y, z)$ – це функції, що і в рівнянні (3.1).

Розв'яжемо рівняння характеристик (3.2).

1. Рівняння гіперболічного типу, тоді рівняння характеристик має 2 загальні інтеграли $\varphi(x, y) = C_1$, $\psi(x, y) = C_2$. Вводимо заміну $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$.

Дане рівняння з частинними похідними зводиться до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}).$$

2. Рівняння параболічного типу, тоді рівняння характеристик має один загальний інтеграл $\varphi(x, y) = C$. Вводимо заміну $\xi = \varphi(x, y)$, а $\eta = \psi(x, y)$ – будь-яка ($\forall$) функція, що задовольняє умові $\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0$. Після заміни

отримуємо канонічний вигляд рівняння
$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \Phi(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}).$$

3. Рівняння еліптичного типу, тоді рівняння характеристик мають вигляд $\varphi(x, y) \pm i \cdot \psi(x, y) = C_{1,2}$, де $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ – функції дійсного змінного.

Вводимо заміну $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$. Після заміни отримуємо канонічний

вигляд рівняння:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \Phi(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}).$$

Після зазначених заміни змінних в рівнянні (3.1) і відповідних підстановок отримуємо наступне рівняння

$$a_1 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2b_1 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + c_1 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + F_1 \left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (3.3)$$

Рівняння (3.3) за формою не відрізняється від рівняння (3.1), але коефіцієнти в (3.3) a_1, b_1, c_1 є вираженими через функції $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$, причому деякі коефіцієнти a_1, b_1, c_1 будуть після перетворень дорівнювати 0. Рівняння (3.2) можна розглянути у вигляді

$$a \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b \cdot \frac{dy}{dx} + c = 0, \quad (3.4)$$

де $a = a(x, y, z), b = b(x, y, z), c = c(x, y, z)$ – це функції, що і в рівнянні (3.1).

Нехай $\varphi(x, y) = \text{const}$ – загальний інтеграл рівняння (3.4), тоді $\frac{dy}{dx}$ як похідна від неявної функції має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial y}.$$

Підстановка цієї похідної в рівняння (3.4) приведе до рівності

$$a \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - 2b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (3.5)$$

Таким чином, якщо в заміні змінних $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$ в якості функції φ взяти $\varphi(x, y)$ з загального інтегралу рівнянь (3.2) або (3.4), тоді отримуємо $a_1 = 0$ з рівняння (3.3), спираючись на рівність (3.5) та перетворення при заміні змінних. За аналогією при $\eta = \psi(x, y)$ отримуємо $c_1 = 0$ з рівняння (3.3). Рівність $\varphi(x, y) = \text{const}$ визначає сім'ю інтегральних кривих на площині xOy . Ці криві називаються характеристиками рівняння (3.1), а рівності (3.2) або (3.4) – рівняннями характеристик, як було вже сказано.

Напишемо сенс методу характеристик для диференціального рівняння з частинними похідними 2-ого порядку (3.1). За звичайним диференціальним рівнянням (3.2) шукаємо характеристики, потім вводимо нові змінні, використовуючи вигляд загальних інтегралів рівняння (3.2). Маємо, що рівняння

(3.1) приймає після перетворень форму, де коефіцієнти дорівнюють 0, а отримане диференціальне рівняння з частинними похідними 2-ого порядку легко розв'язується.

Приклад 1. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння з частинними похідними $x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ у відповідності із його типом.

Розв'язування: $a = x^2$, $b = 0$, $c = -y^2$, $\Delta = x^2 \cdot y^2 > 0$, $x, y \neq 0$. Дане диференціальне рівняння з частинними похідними має гіперболічний тип. Рівняння характеристик має вигляд:

$$x^2 dy^2 - y^2 dx^2 = 0,$$

$$(x dy - y dx) \cdot (x dy + y dx) = 0,$$

$$x dy - y dx = 0 \quad \text{або} \quad x dy + y dx = 0,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \text{або} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1| \quad \text{або} \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C_2|,$$

$$\frac{y}{x} = C_1 \quad \text{або} \quad x \cdot y = C_2.$$

Вводимо нові змінні: $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = x \cdot y$. Для пошуку частинних похідних функцій використовуємо формули

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \\
&+ \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y};
\end{aligned}$$

Шукаємо необхідні частинні похідні

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2}, \\
\frac{\partial \eta}{\partial x} &= y, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 1, \\
\frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0.
\end{aligned}$$

Отримуємо

$$\begin{aligned}
&x^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{y^2}{x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{-y^2}{x^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot 0 \right) - \\
&- y^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot 0 + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot 0 \right) = 0, \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot y^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot y^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{2y}{x} = 0, \\
&- 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot y^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{2y}{x} = 0,
\end{aligned}$$

$$-4y^2 \cdot \xi \cdot \eta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot 2\xi = 0, \quad \xi \neq 0.$$

$$2\eta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Відповідь: $2\eta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$

Приклад 2. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння з частинними похідними у відповідності із його типом:

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot e^{\frac{y}{x}} = 0.$$

Розв'язування: $a = x^2$, $b = xy$, $c = y^2$, $\Delta = b^2 - a \cdot c = x^2 y^2 - x^2 y^2 = 0$, $x \neq 0$.

Дане диференціальне рівняння з частинними похідними належить до параболічного типу при $x \neq 0$. Рівняння характеристик має вигляд:

$$x^2 dy^2 - 2xy dx dy + y^2 dx^2 = 0,$$

$$(x dy - y dx)^2 = 0, \quad x dy = y dx, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln|C|, \quad \frac{y}{x} = C.$$

$$\xi = \varphi(x, y) = \frac{y}{x}.$$

Тоді $\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{x}.$

$$-\frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0.$$

Нехай $\eta(x, y) = y \Rightarrow \frac{y}{x} \neq 0, \quad y \neq 0. \quad D: \{x \neq 0, \quad y \neq 0\}.$

Отже, ввели нові змінні: $\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = y.$

Для пошуку частинних похідних функцій використовуємо формули

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{y^2}{x^4} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{2y}{x^3},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2} \right) \cdot \frac{1}{x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \left(\frac{-y}{x^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \left[\frac{-1}{x^2} \right].$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{1}{x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Після заміни отримуємо

$$\begin{aligned}x^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{y^2}{x^4} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{2y}{x^3} \right) + 2xy \left(-\frac{y}{x^3} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \left(\frac{-y}{x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{x^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} + \\ + \frac{2y^2}{x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2y \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{y}{x^2} + y \cdot e^{\frac{y}{x}} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{y^2}{x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{2y^2}{x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{2y^2}{x} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{2y}{x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} + \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{2y^2}{x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot y^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{2y^2}{x^2} + y \cdot e^{\frac{y}{x}} = 0,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \eta^2 + 2\xi^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \cdot e^{\xi} = 0,$$

$$\xi = \frac{x}{y}, \quad \eta = y \quad (\xi \neq 0, \quad \eta \neq 0).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \left(\frac{\xi}{\eta} \right)^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{e^{\xi}}{\eta} = 0.$$

Відповідь: $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \left(\frac{\xi}{\eta} \right)^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{e^\xi}{\eta} = 0.$

Приклад 3. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння з частинними похідними у відповідності із його типом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Розв'язування: $a = 1, \quad 2b = -2x, \quad c = 0, \quad \Delta = b^2 - a \cdot c = x^2 > 0, \quad x \neq 0.$

Маємо гіперболічний тип диференціального рівняння з частинними похідними.

$$dy^2 + 2x dx dy = 0, \quad dy(dy + 2x dx) = 0,$$

$$dy = 0 \Rightarrow y = C_1;$$

$$dy = -2x dx \Rightarrow y = -x^2 + C_2, \quad x^2 + y = C_2.$$

Заміна змінних $\xi = x^2 + y, \quad \eta = y.$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

$$\text{Отримаємо } 4x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} - 4x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

$$x^2 = \xi - \eta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2(\xi - \eta)} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad \xi \neq \eta.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2(\xi - \eta)} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad \xi \neq \eta.$$

Задачі для самоконтролю

1. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння з частинними похідними у відповідності із його типом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Відповідь: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$

2. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння з частинними похідними у відповідності із його типом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Відповідь: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$

3. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння з частинними похідними в кожній з областей, де зберігається тип розглядуваного рівняння:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot e^{\frac{y}{x}} = 0.$$

Відповідь: параболічний тип рівняння для будь-яких x, y , крім точки $(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2\xi^2}{\eta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta} \cdot e^{\xi} = 0, \quad \xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = y.$$

4. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння з частинними похідними в кожній з областей, де зберігається тип розглядуваного рівняння:

$$xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Відповідь: параболічний тип рівняння для будь-яких x, y , окрім $x=0$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2\eta^2}{\xi - \eta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \xi = x^2 + y^2, \quad \eta = x.$$

5. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння з частинними похідними в кожній з областей, де зберігається тип розглядуваного рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Відповідь: гіперболічний тип рівняння для будь-яких x, y ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \xi = x + y - \cos x, \quad \eta = -x + y - \cos x.$$

6. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння з частинними похідними в кожній з областей, де зберігається тип розглядуваного рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Відповідь: гіперболічний тип рівняння для $x \neq 0$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2(\xi - \eta)} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = x^2 + y, \quad \eta = y. \text{ Якщо } x=0, \text{ тоді } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ і маємо}$$

параболічний тип рівняння.

7. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння з частинними похідними в кожній з областей, де зберігається тип розглядуваного рівняння:

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x-1) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Відповідь: гіперболічний тип рівняння для $x > 0$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2(\xi - \eta)} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \xi = y - x + 2\sqrt{x}, \quad \eta = y - x - 2\sqrt{x}. \text{ Еліптичний тип}$$

$$\text{рівняння для } x < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \xi = -x + y, \quad \eta = 2 \cdot \sqrt{-x}$$

Якщо $x=0$, тоді $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ і маємо параболічний тип рівняння.

РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ

Нехай струна (гнучка пружна нитка) довжини l лежить на вісі Ox , її кінці закріплені в точках $x=0$, $x=l$. В момент часу $t=0$ струну виводять з стану рівноваги – її розтягують за формою деякої кривої в вертикальній площині і перпендикулярно до осі Ox , в цій площині точкам струни дають початкову швидкість, величина якої залежить від положення точки струни. Після цього зовнішню дію прибирають. Під впливом сил пружності і початкового зовнішнього поштовха струна починає рухатися, прямуючи до стану рівноваги. За інерцією це положення рівноваги вона проходить, потім досягає деякого максимального відхилення і прямує до положення рівноваги знову, але з іншого боку. Виникає вільні, тобто без зовнішньої дії, коливання струни. Позначимо u відхилення точок струни від стану рівноваги. Величина u залежить від координати x точки і часу t , тобто маємо $u = u(x, t)$. Ця функція задовольняє хвильовому рівнянню, що надано нижче.

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

де стала a^2 залежить від властивостей матеріалу струни. Виведення зазначеного хвильового рівняння можна переглянути в <https://ukrayinska.libretexts.org> – МАТЕМАТИКА – Диференціальні рівняння – Диференціальні рівняння (Chasnov) – 9. Рівняння з частинними похідними – 9.2 Виведення хвильового рівняння.

Тема 4. Метод д'Аламбера для розв'язування диференціального рівняння з частинними похідними коливань струни. Постановка задач математичної фізики. Рівняння гіперболічного типу: рівняння коливань струни

Граничні умови

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \quad (4.2)$$

Початкові умови

$$u(x,0) = f(x), \quad (4.3)$$

$$u'_t(x,0) = \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x).$$

Розв'язок рівняння (4.1) з початковими умовами (4.3) методом д'Аламбера знаходиться за формулою

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz.$$

(4.1), (4.3) – задача Коши.

Рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ описує коливання малої поперечної струни.

$a^2 = \frac{T}{\rho}$, де a – швидкість поширення хвиль у струні, T – сила натягування, ρ – лінійна густина струни (маса одиниці довжини).

$u(x,t)$ – відхилення X в момент часу t . $u(x,0) = f(x)$ – початкове положення точок струни. $u'_t(x,0) = F(x)$ – розподіл початкових швидкостей точкам струни.

З'ясуємо тип диференціального рівняння з частинними похідними (4.1).

$a=1, \quad b=0, \quad c=-a, \quad b^2 - ac = a^2 > 0 \Rightarrow$ гіперболічний тип рівняння.

Рівняння характеристик

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0, \quad (dx - a dt) \cdot (dx + a dt) = 0,$$

$$(dx - a dt) = 0 \Rightarrow dx = a dt \Rightarrow x = at + C_1 \Rightarrow x - at = C_1.$$

$$(dx + a dt) = 0 \Rightarrow dx = -a dt \Rightarrow x = -at + C_2 \Rightarrow x + at = C_2.$$

Заміна змінних

$$(dx - a dt) = 0 \Rightarrow dx = a dt \Rightarrow x = at + C_1 \Rightarrow x - at = C_1.$$

Заміна змінних: $\xi = x - a \cdot t$, $\eta = x + a \cdot t$.

Функція $u(x, t)$ залежить від двох змінних, тому маємо такі похідні першого і другого порядків за змінними x або t

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot 1 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot 1 = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot (-a) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot a = a \cdot \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a \cdot \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot (-a) - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot a + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot a + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot (-a) \right) = \\ &= a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right). \end{aligned}$$

Отримуємо

$$a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = F_1(\xi), \quad u(\xi, \eta) = f_1(\eta) + F_1(\xi),$$

$$u(x, t) = f_1(x + a \cdot t) + F_1(x - a \cdot t),$$

$$f(x) = u(x, 0) = f_1(x) + F_1(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \cdot \frac{df_1(x + at)}{d(x + at)} - a \cdot \frac{dF_1(x - at)}{d(x - at)},$$

$$F(x) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = a \cdot \frac{df_1(x)}{dx} - a \cdot \frac{dF_1(x)}{dx},$$

$$\frac{1}{a} \cdot \int_b^x F(x) dx = \int_b^x \frac{df_1}{dx} dx - \int_b^x \frac{dF_1}{dx} dx, \text{ де } b - \text{ деяке число.}$$

$$\begin{cases} f_1(x) - F_1(x) = C + \frac{1}{a} \int_b^x F(x) dx, \\ f_1(x) + F_1(x) = f(x). \end{cases}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(f(x) + \frac{1}{a} \int_b^x F(x) dx + C \right),$$

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(f(x) - \frac{1}{a} \int_b^x F(x) dx - C \right).$$

Тоді

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left(f(x+at) + \frac{1}{a} \cdot \int_b^{x+at} F(z) dz + C + f(x-at) - \frac{1}{a} \cdot \int_b^{x-at} F(z) dz - C \right) = \\ &= \frac{1}{2} (f(x+at) + f(x-at)) + \frac{1}{2a} \cdot \left(\int_b^{x+at} F(z) dz + \frac{1}{a} \cdot \int_{x-at}^b F(z) dz \right), \end{aligned}$$

$$u(x, t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz.$$

Приклад 1. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо

$$u(x, 0) = x^2, \quad u'_t(x, 0) = 0.$$

Розв'язування: $a = 1, \quad b = 0, \quad f(x) = x^2, \quad F(x) = 0.$

$$\text{Тоді } u(x, t) = \frac{1}{2} \cdot ((x-t)^2 + (x+t)^2) = x^2 + t^2.$$

Відповідь: $u(x, t) = x^2 + t^2.$

Приклад 2. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u'_t(x, 0) = 1.$$

Розв'язування: $f(x) = \sin x, \quad F(x) = 1.$ Тоді

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \cdot (\sin(x-at) + \sin(x+at)) + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} dz = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 \sin x \cdot \cos at) + t + \frac{1}{2a} \cdot z \Big|_{x-at}^{x+at} = \sin x \cdot \cos at + \frac{1}{2a} \cdot (x+at - x+at) \\ &= \sin x \cdot \cos at + t. \end{aligned}$$

Відповідь: $u(x, t) = \sin x \cdot \cos at + t$.

Висновки.

Якщо початкові швидкості точок струни відсутні, тобто $F(x) = 0$, і струна коливається лише за рахунок початкових відхилень $f(x)$, тоді формула д'Аламбера коливань струни матиме вигляд $u(x, t) = \frac{1}{2} \cdot (f(x - at) + f(x + at))$. Вона визначає утворення на струні хвиль відхилення, що поширюються від початкової точки праворуч і ліворуч у вигляді опуклостей, утворюючи біжучу хвилю (рис. 4.1, 4.2).

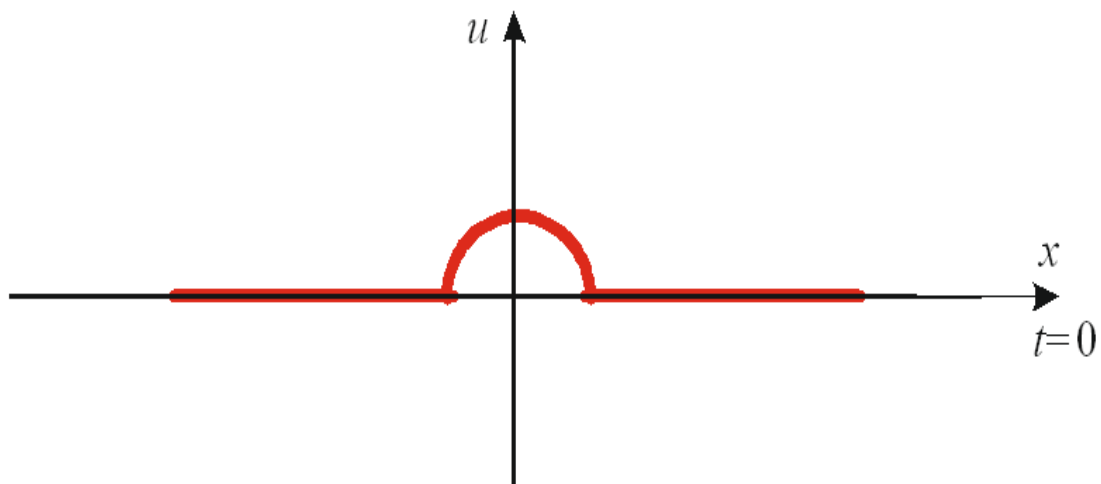


Рисунок 4.1. Початкове відхилення $f(x)$ струни в момент часу $t = 0$.

Використовуємо початкову умову $u(x, 0) = f(x)$, на проміжку $(-l, l)$ отримуємо функцію $f(x)$ (рис. 4.1). Коливання струни мають вигляд $u(x, t) = \frac{1}{2} \cdot (f(x - at) + f(x + at))$, тоді хвилі поширюються праворуч і ліворуч з часом, як показано на рисунку 4.2.

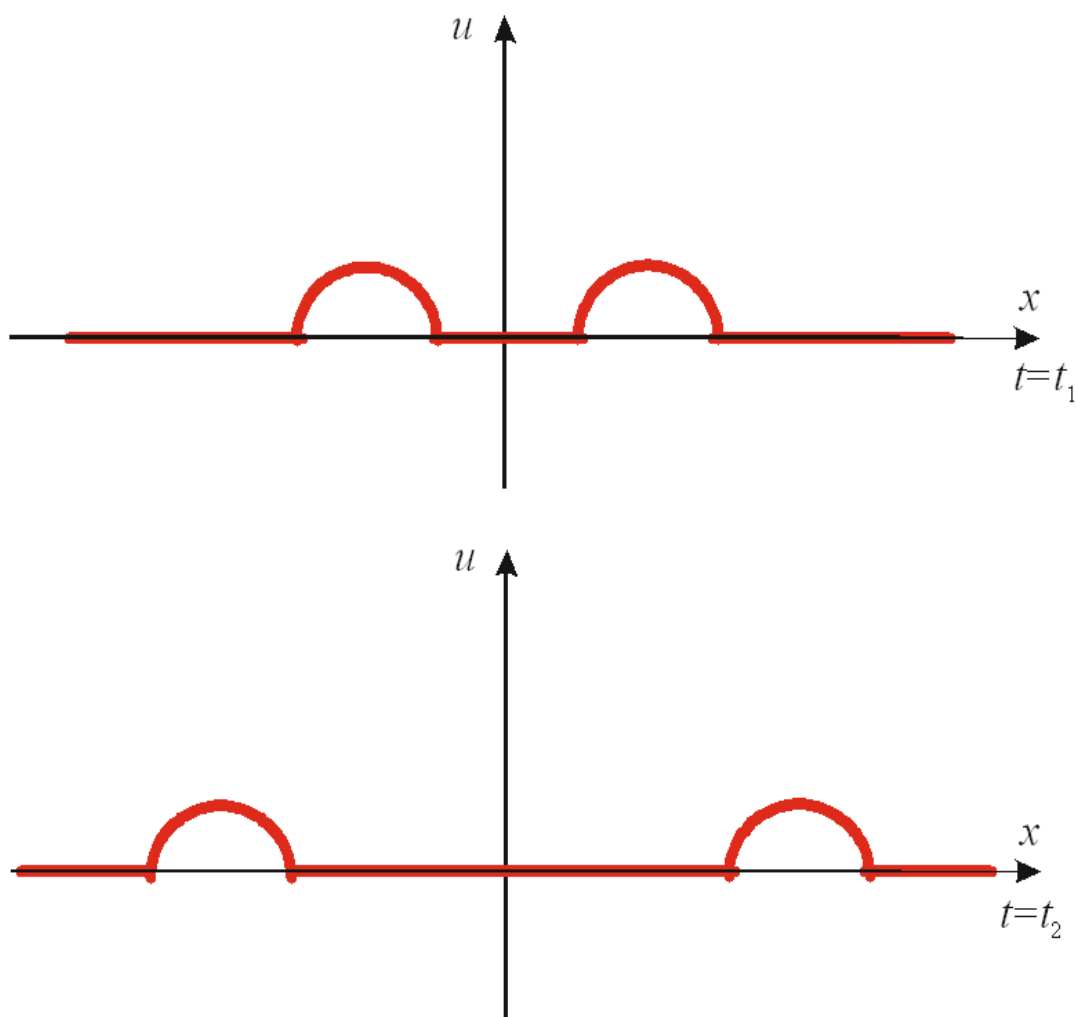


Рисунок 4.2. Розповсюдження хвилі вздовж струни з часом.

Якщо початкові відхилення точок струни дорівнюють 0, а коливання струни відбуваються за рахунок того, що в початковий момент часу точки струни отримали початкові швидкості $F(x)$, то формула коливань струни матиме вигляд

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} F(x) dx.$$

Вона визначає утворення в струні хвиль імпульсу, що

поширюється в тій у формі трапеції (рис. 4.3).

Загальний випадок початкових умов є результатом накладання (суперпозиції) розглянутих двох випадків біжучих хвиль.

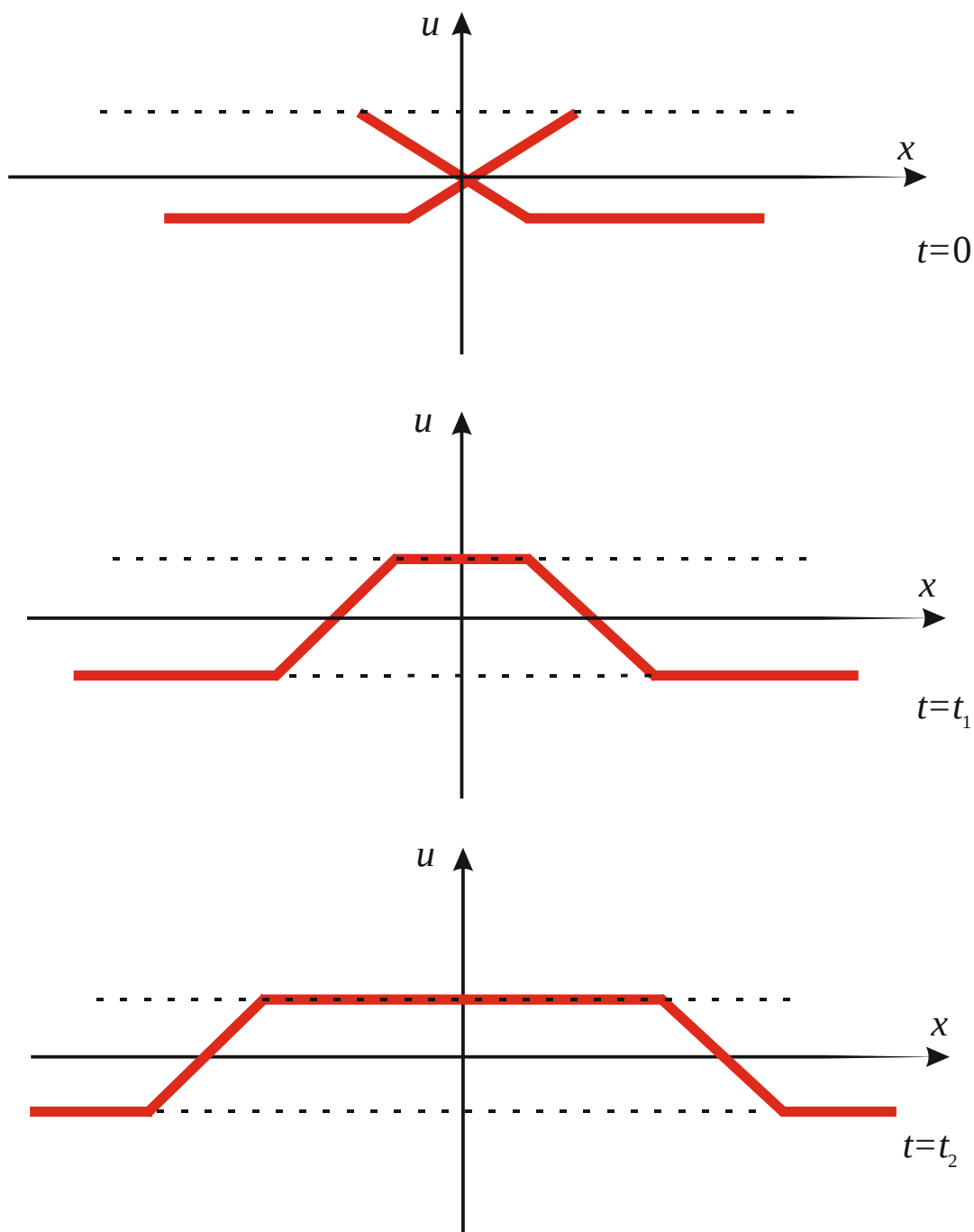


Рисунок 4.3. Розповсюдження хвилі вздовж струни з часом.

Граничні умови $u(x,0) = u(l,t) = 0$ свідчать, що кінці струни закріплені.

Задачі для самоконтролю

1. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо

$$u(x,0) = \sin x, \quad u'_t(x,0) = x^2.$$

Відповідь: $u(x,t) = \sin x \cdot \cos 4t + x^2 \cdot t + \frac{16}{3}t^3.$

2. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо

$$u(x, 0) = 1 + \cos^2 x, \quad u'_t(x, 0) = \sin x.$$

$$\text{Відповідь: } u(x, t) = \frac{1}{4} \sin x \cdot \sin 4t + 1 + \frac{1}{2} (\cos^2(x + 4t) + \cos^2(x - 4t)).$$

Завдання для самостійного виконання

1. Знайти розв'язок даного рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при початкових умовах

$$u(x, 0) = x^2, \quad u'_t(x, 0) = 0.$$

2. Знайти розв'язок даного рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при початкових умовах

$$u(x, 0) = x + \cos x, \quad u'_t(x, 0) = \sin x.$$

3. Знайти розв'язок даного рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при початкових умовах

$$u(x, 0) = x, \quad u'_t(x, 0) = -x.$$

4. Знайти розв'язок даного рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при початкових умовах

$$u(x, 0) = x^2, \quad u'_t(x, 0) = 0.$$

5. Знайти розв'язок даного рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при початкових умовах

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = x.$$

Тема 5. Рівняння гіперболічного типу: рівняння коливань струни.

Розв'язування рівняння коливань струни методом Фур'є

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0; l), \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u_t(x, 0) = F(x),$$

$$u(0, t) = u_x(l, t) \text{ (крайові умови).}$$

Розв'язок хвильового рівняння шукаємо у вигляді: $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$.

Підставимо розв'язок $u(x, t)$ в початкове рівняння

$$\ddot{T}(t) \cdot X(x) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t), \quad : a^2 \cdot X(x) \cdot T(t)$$

$$\lambda = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

$$\begin{cases} X'' - \lambda \cdot X = 0, \\ \ddot{T} - \lambda \cdot a^2 \cdot T = 0 \end{cases}$$

$$u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0,$$

$$u_x(l, t) = X'(l) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X'(l) = 0.$$

Шукаємо нетривіальний розв'язок рівняння з умовами

$$\begin{cases} X'' - \lambda \cdot X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(l) = 0 \end{cases}$$

$$k^2 - \lambda = 0,$$

$$(k - \sqrt{\lambda})(k + \sqrt{\lambda}) = 0, \quad k_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda}$$

$$X(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} \cdot x},$$

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0, \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$X'(l) = \sqrt{\lambda} \cdot (C_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot l} + (-C_2) \cdot e^{-\sqrt{\lambda} \cdot l}) = \sqrt{\lambda} \cdot C_1 \cdot (e^{\sqrt{\lambda} \cdot l} + e^{-\sqrt{\lambda} \cdot l}) = 0.$$

$C_1 \neq 0$, тому що шукаємо нетривіальний розв'язок рівняння. Тоді $\lambda = 0$. Якщо

$$\lambda = 0 \Rightarrow X'' = 0, \quad X'(x) = b_1,$$

$X(x) = b_1 x + b_2$, b_1, b_2 – числа. $X(0) = b_2 = 0$, $X'(l) = b_1 = 0 \Rightarrow X(x) = 0$ – тривіальний розв'язок.

$$\text{Тоді } e^{\sqrt{\lambda} \cdot l} + e^{-\sqrt{\lambda} \cdot l} = 0,$$

$$e^{2\sqrt{\lambda} \cdot l} + 1 = 0,$$

$$e^{2\sqrt{\lambda} \cdot l} = -1,$$

$$e^{2\sqrt{\lambda} \cdot l} = e^{i \cdot (2k+1) \cdot \pi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{i \cdot (2k+1) \cdot \pi}{2l},$$

$$\lambda_k = \lambda = -\left(\frac{(2k+1) \cdot \pi}{2l}\right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Кожному k відповідає значення $\lambda = \lambda_k$. λ_k – власне значення. $X_k(x)$ – власна

$$\text{функція. } X_k(x) = C_1 \cdot \frac{(e^{\sqrt{\lambda_k} \cdot x} + e^{-\sqrt{\lambda_k} \cdot x})}{2i} \cdot 2i = 2i \cdot C_1 \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right).$$

$$\begin{cases} X_k(x) = 2 \cdot C_1 \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right), \\ \lambda_k = -\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}\right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Якщо $u + i \cdot v$ – розв'язок лінійного рівняння, то u , v – розв'язки лінійного рівняння.

$$\ddot{T}(t) - \lambda \cdot a^2 \cdot T = 0,$$

$$\ddot{T} + \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}\right)^2 \cdot a^2 \cdot T = 0,$$

$$p^2 + \left(\frac{(2k+1)\pi \cdot a}{2l}\right)^2 = 0,$$

$$p^2 = \pm i \cdot \frac{(2k+1)\pi \cdot a}{2l},$$

$$T_k(t) = a_k \cdot \cos \frac{(2k+1)\pi a}{2l} \cdot t + b_k \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi a}{2l} \cdot t,$$

$$u(x, t) = \left(A_k \cdot \cos \frac{(2k+1)\pi a}{2l} \cdot t + B_k \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi a}{2l} \cdot t \right) \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} \cdot x.$$

$$u(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} = f(x),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot \varphi_k(x) = f(x).$$

Власних функцій лічильна множина. Вони створюють повну систему функцій в $L^2_{[a,b]}$ або в $C^2_{[a,b]}$. Також ці функції створюють ортогональну систему.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot X_k(x) \quad \cdot (X_n(x))$$

$$\int_0^l f(x) \cdot X_n(x) dx = \int_0^l \sum_k A_k \cdot X_k(x) \cdot X_n(x) dx,$$

$$\int_0^l f(x) \cdot X_n(x) dx = \sum_k A_k \cdot \int_0^l X_k(x) \cdot X_n(x) dx = A_n \cdot \int_0^l X_n^2(x) dx,$$

$$A_n = \frac{\int_0^l f(x) \cdot X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx}.$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{(2n+1)\pi}{2l} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{(2n+1)\pi}{l} \cdot x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{l}{(2n+1) \cdot \pi} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi}{l} \cdot x \right) \Big|_0^l = \frac{1}{2} \left(l - \frac{l}{(2n+1) \cdot \pi} \cdot \sin(2n+1)\pi \right) = \frac{l}{2}.$$

$$A_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi \cdot x}{2l} dx$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cdot \frac{(2k+1)\pi a}{2l} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} \cdot x = F(x),$$

$$B_k \cdot \frac{(2k+1)\pi a}{2l} = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l F(x) \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} \cdot x dx,$$

$$F(x) \in C^1_{[0,l]}, \quad F(0) = F(l) = 0.$$

$$f(x) \in C^1_{[0,l]}, \quad f(0) = f(l) = 0.$$

Отже,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{(2k+1)\pi a}{2l} \cdot t + B_k \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi a}{2l} \cdot t \right) \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} \cdot x,$$

$$\text{де } A_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \cdot X_n(x) dx,$$

$$B_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a} \cdot \int_0^l F(x) \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} \cdot x dx.$$

Індивідуальне завдання 3

1. Знайти розв'язок $u(x, t)$ наступних задач в області $0 < x < l, \quad t > 0$:

Варіант 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

$$u(0, t) = u_x(l, t) = 0 \quad (\text{крайові умови}).$$

Варіант 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

$$u_x(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (\text{крайові умови}).$$

Варіант 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \quad (\text{крайові умови}).$$

Варіант 4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = 0,$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \text{ (крайові умови).}$$

Варіант 5

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = \cos\left(\frac{3\pi x}{2l}\right), \quad u_t(x,0) = \cos\left(\frac{7\pi x}{2l}\right),$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \text{ (крайові умови).}$$

Тема 6. Розв'язування рівняння коливань струни методом Фур'є. Стоячі хвилі

Задача. Розв'язати рівняння коливань струни $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \frac{4h}{l^2} \cdot x \cdot (l - x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) = 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0.$$

Розв'язування: розв'язок рівняння коливань струни шукаємо у вигляді:
 $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Підставимо розв'язок $u(x, t)$ в початкове рівняння

$$\ddot{T}(t) \cdot X(x) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t),$$

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

$$\lambda = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad X(0) = X(l) = 0.$$

$$\begin{cases} X'' - \lambda \cdot X = 0, \\ \ddot{T} - \lambda \cdot a^2 \cdot T = 0 \end{cases}$$

$$u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0,$$

$$u(l, t) = X(l) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0.$$

Шукаємо нетривіальний розв'язок рівняння коливань струни

$$\begin{cases} X'' - \lambda \cdot X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

$$p^2 - \lambda = 0, \quad p_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda}.$$

$$X(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} \cdot x},$$

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0, \Rightarrow C_2 = -C_1.$$

$$X(l) = C_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot l} - C_1 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} \cdot l} = C_1 \cdot (e^{\sqrt{\lambda} \cdot l} - e^{-\sqrt{\lambda} \cdot l}) = 0,$$

$C_1 \neq 0$, тому що шукаємо нетривіальний розв'язок рівняння.

$$e^{\sqrt{\lambda} \cdot l} - e^{-\sqrt{\lambda} \cdot l} = 0, \quad e^{2\sqrt{\lambda} \cdot l} = 1, \quad e^{2\sqrt{\lambda} \cdot l} = e^{i \cdot 2k \cdot \pi},$$

$$2\sqrt{\lambda} \cdot l = i \cdot 2k \cdot \pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{k \cdot \pi}{l} \cdot i, \quad \lambda_k = -\left(\frac{k \cdot \pi}{l}\right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Кожному k відповідає значення $\lambda = \lambda_k$. λ_k – власне значення, $X_k(x)$ – власна функція.

$$X_k(x) = C_1 \cdot (e^{\sqrt{\lambda_k} \cdot l} - e^{-\sqrt{\lambda_k} \cdot l}) = C_1 \cdot 2i \cdot \frac{e^{\sqrt{\lambda_k} \cdot x} - e^{-\sqrt{\lambda_k} \cdot x}}{2i} = i \cdot 2C_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right).$$

$$\begin{cases} X_k(x) = 2 \cdot C_1 \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \\ \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\ddot{T}(t) - \lambda \cdot a^2 \cdot T = 0,$$

$$\ddot{T}_k(t) + \frac{\pi^2 \cdot k^2 \cdot a^2}{l^2} \cdot T = 0,$$

$$p^2 + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 = 0,$$

$$p^2 = \pm \frac{k\pi a}{l} \cdot i,$$

$$T_k(t) = a_k \cdot \cos \frac{k\pi a}{l} \cdot t + b_k \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} \cdot t,$$

$$u_k(x, t) = \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi a}{l} t + B_k \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad A_k = 2C_1 a_k, \quad B_k = 2C_1 b_k.$$

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi a}{l} t + B_k \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l},$$

$$u(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \right) = \frac{4h}{l^2} \cdot x \cdot (l - x),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot X_k(x) = \varphi(x), \quad \cdot (X_n(x))$$

$$\int_0^l \varphi(x) \cdot X_n(x) dx = \int_0^l \sum_{k=0}^{\infty} A_k X_{k(x)} \cdot X_n(x) dx,$$

$$A_n \cdot \int_0^l X_n^2(x) dx = \int_0^l \varphi(x) \cdot X_n(x) dx, \quad A_n = \frac{\int_0^l \varphi(x) \cdot X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx},$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{l} x \right) dx = \left(\frac{1}{2} x - \frac{l}{2\pi n} \cdot \sin \frac{2\pi n}{l} x \right) \Big|_0^l = \frac{l}{2},$$

$$A_n = \frac{1}{2} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin \frac{\pi k x}{l} \cdot \frac{\pi k a}{l} \cdot \left(B_k \cos \frac{\pi k a t}{l} - A_k \sin \frac{\pi k a t}{l} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{\pi k a}{l} \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} = \psi(x),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k \cdot \frac{k \pi a}{l} \cdot X_k(x) = \psi(x), \quad (\cdot X_n(x))$$

$$\int_0^l \psi(x) \cdot X_n(x) dx = \int_0^l dx \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cdot \frac{k \pi a}{l} \cdot X_k(x) \cdot X_n(x)$$

$$B_k \cdot \frac{k \pi a}{l} \cdot \int_0^l X_n^2(x) dx = \int_0^l \psi(x) \cdot X_n(x) dx,$$

$$B_n \cdot \frac{n \pi a}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cdot X_n(x) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{\pi n a} \cdot \int_0^l \psi(x) \cdot X_n(x) dx.$$

Розв'язком рівняння коливань струни є функція

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k \pi a}{l} t + B_k \cdot \sin \frac{k \pi a}{l} t \right) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l},$$

$$\text{де } A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad B_n = \frac{2}{\pi n a} \cdot \int_0^l \psi(x) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x dx \quad \text{при}$$

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \frac{4h}{l^2} \cdot x \cdot (l - x), \quad \psi(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0.$$

Стоячі хвилі

Введемо позначення $F_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{A_k}{B_k}$. Тоді розв'язок рівняння

коливань струни можна записати $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi a}{l}t + \varphi_k\right) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l}$,

фізичний зміст: всі точки струни виконують гармонічні коливання з частотою $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$ і фазою φ_k . Амплітуда коливань залежить від абсциси x точки струни

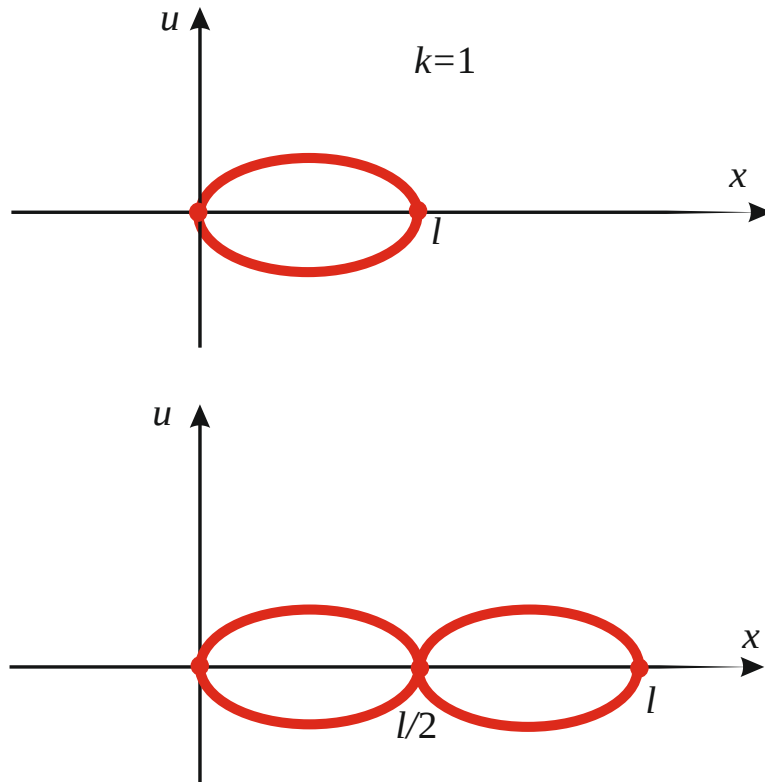
і дорівнює $F_k \cdot \sin \frac{\pi k x}{l}$. При такому коливанні точки одночасно досягають свого

максимального відхилення в одну і другу сторону і одночасно проходять положення рівноваги. Таке коливання називається стоячими хвилями.

Кожна струна може мати свої власні коливання, лише певної частоти

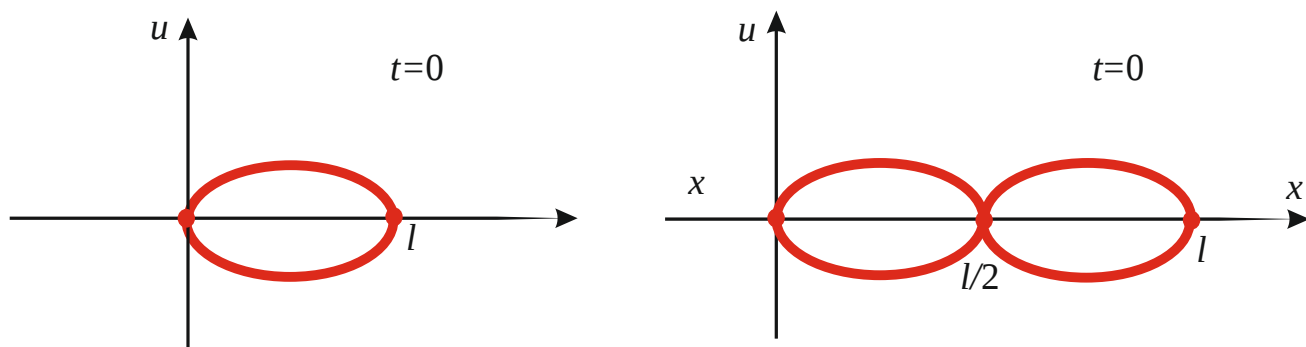
$\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$ – власні частоти струни. Найменша власна частота $\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{T}{\rho}}$,

де T – сила натягу струни, ρ – лінійна густина.



При коливанні струна створює звук, висота якого зростає із частотою коливання. При власних коливаннях найнижчий тон буде при частоті ω_1 . Чим більший натяг T струни і чим коротша струна, тим звук буде вищий.

Деякі пояснення щодо стоячих хвиль



$$\omega_k = \frac{k\pi a}{l} - \text{власна частота струни. } k=1, \quad \omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Завдання для самостійного виконання

Задача 1. Розв'язати рівняння коливань струни при $0 \leq x \leq l, \quad t > 0$

$$u''_{tt} = a^2 \cdot u''_{xx},$$

$$u(x, 0) = \frac{4h}{l^2} \cdot x \cdot (l - x),$$

$$u'_t(x, 0) = 0.$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Задача 2. Розв'язати рівняння коливань струни при $0 \leq x \leq l, \quad t > 0$

$$u''_{tt} = a^2 \cdot u''_{xx},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u'_t(x, 0) = 0.$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Задача 3. Розв'язати рівняння коливань струни при $0 \leq x \leq l, \quad t > 0$

$$\begin{aligned}
 u''_{tt} &= a^2 \cdot u''_{xx}, \\
 u(x, 0) &= \begin{cases} \frac{2h}{l} \cdot x & \text{при } x \in \left[0, \frac{l}{2}\right], \\ \frac{2h}{l} \cdot (l - x) & \text{при } x \in \left(\frac{l}{2}, l\right] \end{cases}, \\
 u'_t(x, 0) &= 0. \\
 u(0, t) &= u(l, t) = 0.
 \end{aligned}$$

Задача 4. Розв'язати рівняння коливань струни при $0 \leq x \leq l$, $t > 0$

$$\begin{aligned}
 u''_{tt} &= 4 \cdot u''_{xx}, \\
 u(x, 0) &= 5 - 6 \cdot \cos x, \\
 u'_t(x, 0) &= 2x. \\
 u(0, t) &= u(l, t) = 0.
 \end{aligned}$$

Задача 5. Розв'язати рівняння коливань струни при $0 \leq x \leq l$, $t > 0$

$$\begin{aligned}
 u''_{tt} &= 16 \cdot u''_{xx}, \\
 u(x, 0) &= 5 - 6 \cos \frac{4\pi}{l} x, \\
 u'_t(x, 0) &= 2x^2. \\
 u_x(0, t) &= u_x(l, t) = 0.
 \end{aligned}$$

Тема 7. Рівняння гіперболічного типу. Неоднорідні рівняння. Метод Фур'є

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(x, t), \quad (7.1)$$

де функція $G(x, t) = \frac{1}{\rho} \cdot g(x, t)$, ρ – густина матеріалу, $g(x, t)$ – густина розподілу зовнішніх сил. Рівняння (7.1) описує коливання струни при дії вимушеної сили $G(x, t)$. Причому за допомогою цього рівняння можна описати вимушені коливання струни і вимушені повздовжні коливання стержня. Початкові умови

$$u(x, 0) = f(x), \quad u'_t(x, 0) = F(x) \quad (7.2)$$

Граничні умови

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (7.3)$$

Розв'язок рівняння (7.1) з додатковими умовами (7.2), (7.3) шукаємо у вигляді $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, де функція $v(x, t)$ задовольняє однорідному рівнянню

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (7.4)$$

і умовам (7.2) і (7.3). Функція $w(x, t)$ задовольняє неоднорідному рівнянню (7.1), граничним умовам (7.3) і наступним початковим умовам

$$w(x, 0) = w'_t(x, 0) = 0 \quad (7.2^*)$$

Функція $v(x, t)$ має вигляд (знайдена за методом Фур'є)

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos \frac{k\pi a}{l} t + B_k \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l},$$
$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l F(x) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Функція $w(x, t)$ описує вимушені коливання, що відбуваються під дією зовнішніх сил, при відсутніх початкових збуреннях. Будемо шукати функцію $w(x, t)$ у вигляді розвинення в ряд за власними функціями $\sin \frac{\pi k x}{l}$ однорідної

задачі $w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x$, де $\gamma_k(t)$ – шукані функції. Відомо, що $w(0,t) = w(l,t) = 0$, $w(x,0) = w'_t(x,0) = 0$. Тоді $\gamma_k(0) = 0$.

Маємо

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = G(x,t);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\gamma_k''(t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x + \gamma_k \cdot \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \cdot a^2 \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \right) = G(x,t);$$

розкладемо функцію $G(x,t)$ на інтервалі $(0,l)$ у ряд по синусах з аргументом x :

$$G(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}, \text{ де}$$

$$g_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l G(x,t) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} dx.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при власних функціях:

$$\gamma_k''(t) + \gamma_k(t) \cdot \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2 = g_k(t) \quad (7.5)$$

$$\gamma_k(0) = \gamma'_k(0) = 0.$$

Загальний розв'язок рівняння (7.5) має вигляд:

$$\gamma_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t + \gamma_{kr}(t),$$

де $\gamma_{kr}(t)$ – частинний розв'язок рівняння (7.5), якщо функція $\gamma_k(t)$ має спеціальний вигляд. Якщо функція $\gamma_k(t)$ довільна, тоді використовуємо метод

варіації довільної сталої для пошуку $\gamma_k(t) = a_k(t) \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k(t) \sin \frac{k\pi a}{l} t$, де $a_k(t)$

і $b_k(t)$ – шукані функції, $\gamma_k(0) = \gamma'_k(0) = 0$.

Використовуємо метод варіації довільних сталих

$$\begin{cases} a'_k(t) \cos \frac{k\pi a}{l} t + b'_k(t) \sin \frac{k\pi a}{l} t = 0, \\ -a'_k(t) \cdot \frac{k\pi a}{l} \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} t + b'_k(t) \cdot \frac{k\pi a}{l} \cdot \cos \frac{k\pi a}{l} t = g_k(t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'_k(t) \cdot \cos \frac{k\pi a}{l} t + b'_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} t = 0, \\ -a'_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} t + b'_k(t) \cdot \cos \frac{k\pi a}{l} t = \frac{l}{k\pi a} \cdot g_k(t). \end{cases} \quad (7.6)$$

Ліву та праву частини першого рівняння з системи диференціальних рівнянь (7.6) помножаємо на $\cos \frac{k\pi a}{l} t$, ліву та праву частини другого рівняння з системи диференціальних рівнянь (7.6) помножаємо на $\sin \frac{k\pi a}{l} t$ та віднімаємо перше рівняння від другого, маємо:

$$\begin{aligned} a'_k(t) &= -\frac{l}{k\pi a} g_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} t, \\ a_k(t) &= -\frac{l}{k\pi a} \int g_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} t dt + a_k, \end{aligned}$$

за аналогією перше рівняння з (7.6) помножаємо на $\sin \frac{k\pi a}{l} t$, друге – на $\cos \frac{k\pi a}{l} t$ та додаємо перше рівняння до другого:

$$\begin{aligned} b'_k(t) &= \frac{l}{k\pi a} g_k(t) \cdot \cos \frac{k\pi a}{l} t, \\ b_k(t) &= \frac{l}{k\pi a} \int g_k(t) \cdot \cos \frac{k\pi a}{l} t dt + b_k. \end{aligned}$$

Тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} \gamma_k(t) &= \left(a_k - \frac{l}{k\pi a} \int_0^t g_k(\tau) \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} \tau d\tau \right) \cdot \cos \frac{k\pi a}{l} t + \\ &+ \left(b_k + \frac{l}{k\pi a} \int_0^t g_k(\tau) \cdot \cos \frac{k\pi a}{l} \tau d\tau \right) \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} t = \\ &a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} t + \frac{l}{k\pi a} \int_0^t g_k(\tau) \cdot \left(\sin \frac{k\pi a}{l} t \cos \frac{k\pi a}{l} \tau - \sin \frac{k\pi a}{l} \tau \cos \frac{k\pi a}{l} t \right) d\tau = \\ &= a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} t + \frac{l}{k\pi a} \int_0^t g_k(\tau) \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} t(t-\tau) d\tau, \end{aligned}$$

при $\gamma_k(0) = \gamma'_k(0) = 0$ маємо

$$\gamma_k(t) = \frac{l}{k\pi a} \int_0^t g_k(\tau) \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} (t-\tau) d\tau. \quad (7.7)$$

Отже, $w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x$, де функції $\gamma_k(t)$ шукаємо за (7.7),

$$g_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l G(x, t) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} dx.$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (7.1) за умов (7.2), (7.3) має вигляд:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

$$v(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz,$$

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x, \text{ де}$$

$$\gamma_k(t) = \frac{l}{k\pi a} \cdot \int_0^t g_k(\tau) \cdot \sin \frac{k\pi a}{l} (t - \tau) d\tau, \text{ де}$$

$$g_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l G(x, t) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} dx.$$

Функція $G(x, t)$ є вимушеною силою в рівнянні (7.1).

Завдання для самостійного виконання

Задача 1. Розв'язати рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t$, якщо
 $u(x, 0) = x^2, \quad u'_t(x, 0) = 2x, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$

Задача 2. Розв'язати рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 6 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t^2 + 2t$, якщо
 $u(x, 0) = x, \quad u'_t(x, 0) = 5, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$

Задача 3. Розв'язати рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^t$, якщо
 $u(x, 0) = x^2, \quad u'_t(x, 0) = 2x, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$

Задача 4. Розв'язати рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3t$, якщо
 $u(x, 0) = \cos \frac{5\pi}{l} x, \quad u'_t(x, 0) = 2x^2, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$

Задача 5. Розв'язати рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t^2$, якщо

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi}{l} x, \quad u'_t(x, 0) = x, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Тема 8. Застосування методу Д'Аламбера для неоднорідного рівняння гіперболічного типу

Розглянемо метод Д'Аламбера у випадку вимушених коливань струни.

Задача. Розв'язати рівняння коливань струни $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t$, якщо

$$u(x, 0) = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2x.$$

Розв'язування: розв'язок рівняння шукаємо у вигляді $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, де функція $v(x, t)$ задовольняє відповідному однорідному рівнянню

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \text{ і умовам } v(x, 0) = x^2, \quad v_t'(x, 0) = 2x,$$

функція $w(x, t)$ задовольняє неоднорідному рівнянню

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2t \quad (8.1)$$

і умовам $w(x, 0) = w_t'(x, 0) = 0$.

Використовуємо тему 4 даного посібника. З'ясуємо тип диференціального рівняння з частинними похідними $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 4 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$. Маємо

$a=1, \quad b=0, \quad c=-4 \Rightarrow b^2 - a \cdot c = 4 > 0 \Rightarrow$ диференціальне рівняння з частинними похідними має гіперболічний тип. Рівняння характеристик має вигляд

$$\begin{aligned} dx^2 - 4 \cdot dt^2 &= 0, \\ (dx - 2 \cdot dt)(dx + 2 \cdot dt) &= 0, \\ dx &= 2 \cdot dt, & dx &= -2 \cdot dt, \\ x &= 2t + C_1, & x &= -2t + C_2, \\ x - 2t &= C_1, & x + 2t &= C_2, \end{aligned}$$

заміна змінних $\xi = x - 2t, \quad \eta = x + 2t$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot (-2) + 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right).$$

Застосовуємо метод Д'Аламбера у випадку вимушених коливань струни.

$$\text{Маємо } 4 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) - 4 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = F_1(\xi), \quad u(\xi, \eta) = F_1(\xi) + F_2(\eta).$$

$$u(x, t) = F_1(x - 2t) + F_2(x + 2t).$$

$$u(x, 0) = F_1(x) + F_2(x) = x^2,$$

$$u'_t(x, 0) = -2(F_1)'_x + 2(F_2)'_x = 2x,$$

$$(F_2)'_x - (F_1)'_x = x,$$

$$\int_b^x (F_2'(x) - F_1'(x)) dx = \int_b^x x dx + C,$$

$$F_2(x) + F_1(x) = x^2,$$

$$\begin{cases} F_2(x) - F_1(x) = \int_b^x x dx + C, \\ F_2(x) - F_1(x) = x^2. \end{cases}$$

$$F_2(x) = (x^2 + \int_b^x x dx) \cdot \frac{1}{2} + \frac{C}{2},$$

$$F_1(x) = (x^2 - \int_b^x x dx) \cdot \frac{1}{2} - \frac{C}{2},$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(x - 2t)^2 - \frac{1}{2} \int_b^{x-2t} x dx + \frac{1}{2}(x + 2t)^2 + \frac{1}{2} \int_b^{x+2t} x dx =$$

$$= \frac{1}{2}((x - 2t)^2 + (x + 2t)^2) + \frac{1}{2} \int_{x-2t}^{x+2t} z dz.$$

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= x^2 + 4t^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (x+2t)^2 - \frac{1}{2} \cdot (x-2t)^2 \right) = \\
&= x^2 + 4t^2 + \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot 2 \cdot xt + 2 \cdot 2 \cdot xt) = x^2 + 4t^2 + 2xt.
\end{aligned}$$

Шукаємо функцію $w(x,t)$ у вигляді $w(x,t) = a(t) \cdot x^2 + b(t) \cdot x + c(t)$,
де $a(t), b(t), c(t)$ – шукані функції.

$$w'_x = 2a(t) \cdot x + b(t), \quad w''_x = 2a(t),$$

$$w'_t = 2a'_t \cdot x^2 + b'_t \cdot x + c'_t, \quad w''_t = 2a''_{tt} \cdot x^2 + b''_{tt} \cdot x + c''_{tt}.$$

Підставляємо знайдені вирази в неоднорідне рівняння коливань струни (8.1):

$$2a''_{tt} \cdot x^2 + b''_{tt} \cdot x + c''_{tt} - 8a(t) = 2t,$$

$$\begin{array}{l|l}
x^2 & a''_{tt} = 0 \\
x & b''_{tt} = 0 \\
x^0 & c''_{tt} - 8a(t) = 2t
\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a'_t = A_1, \quad a(t) = A_1 t + A_2 \\ b'_t = B_1, \quad b(t) = B_1 t + B_2 \\ c''_{tt} - 8a(t) = 2t \end{array}$$

$$c''_{tt} = 8 \cdot (A_1 t + A_2) + 2t = t \cdot (8A_1 + 2) + 8A_2,$$

$$c'_t = (4A_1 + 1)t^2 + 8A_2 t + C_1,$$

$$c(t) = \frac{4A_1 + 1}{3} t^3 + 4A_2 t^2 + C_1 t + C_2.$$

За умовою маємо $w(x,0) = a(0) \cdot x^2 + b(0) \cdot x + c(0) = 0$,

$$\begin{cases} a(0) = 0 \\ b(0) = 0 \\ c(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(0) = A_2 = 0 \\ b(0) = B_2 = 0 \\ c(0) = C_2 = 0 \end{cases}$$

$$w'_t(x,0) = a'_t(0) \cdot x^2 + b'_t(0) \cdot x + c'_t(0) = 0,$$

$$\begin{cases} a'_t(0) = 0 \\ b'_t(0) = 0 \\ c'_t(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'_t(0) = A_1 = 0 \\ b'_t(0) = B_1 = 0 \\ c'_t(0) = C_1 = 0 \end{cases}$$

Отримуємо $a(t) = 0, \quad b(t) = 0, \quad c(t) = \frac{1}{3}t^3 \Rightarrow w(x,t) = \frac{t^3}{3}.$

Розв'язок неоднорідного рівняння коливань струни з початковими умовами має вигляд: $u(x, t) = x^2 + 2xt + \frac{t^3}{3} + 4t^2$.

Завдання для самостійного виконання

Задача 1. Розв'язати рівняння коливань струни $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 8 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t$, якщо $u(x, 0) = x^3$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x$.

Задача 2. Розв'язати рівняння коливань струни $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - t^2$, якщо $u(x, 0) = \cos x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2x$.

Задача 3. Розв'язати рівняння коливань струни $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t$, якщо $u(x, 0) = \sin 2x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x^2 - x$.

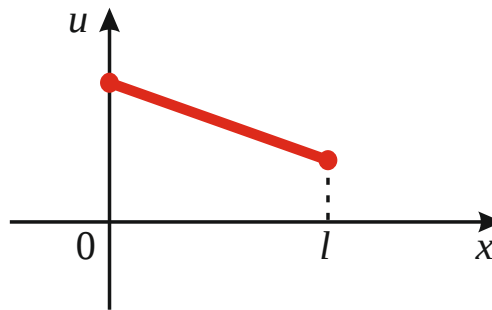
Задача 4. Розв'язати рівняння коливань струни $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 12 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t^2 + 4t - 3$, якщо $u(x, 0) = x^2$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x \cdot \sin 3x$.

Задача 5. Розв'язати рівняння коливань струни $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t + 5$, якщо $u(x, 0) = x^3$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x^2 - x + 1$.

Тема 9. Рівняння параболічного типу. Рівняння теплопровідності

Рівняння з частинними похідними 2-го порядку параболічного типу часто зустрічаються при вивченні процесів теплопровідності і дифузії. Найпростіше рівняння параболічного типу $u'_t = a^2 \cdot u''_{xx}$.

Розглядається однорідний стрижень довжини l , що є теплоізольованим з боків й достатньо тонкий, щоб в будь-який момент часу температуру в усіх точках поперечного перерізу можна вважати однаковою. Якщо кінці стрижня тримати при сталих температурах u_1 і u_2 , то вздовж стрижня встановлюється лінійний розподіл температури $u(x) = u_1 + \frac{(u_2 - u_1)x}{l}$.



При цьому від більш нагрітого до менш нагрітого кінця стрижня буде перетикати тепло.

$a^2 = \frac{k}{c \cdot \rho}$ – коефіцієнт температуропровідності,

k – коефіцієнт теплопровідності, який залежить від матеріалу стрижня,

c – питома теплоємність,

ρ – щільність матеріалу.

Процес поширення температури в стрижні може бути описаний функцією $u(x, t)$, що надає інформацію про температуру в перерізі стрижня з абсцисою x в момент часу t . Якщо є джерело тепла, то рівняння теплопровідності можна записати як неоднорідне $u'_t = a^2 \cdot u''_{xx} + f(x, t)$,

$$a^2 = \frac{k}{c \cdot \rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c \cdot \rho}, \quad F(x, t) = F_1(x, t) - h \cdot (u - \theta), \quad \text{де } F_1(x, t) - \text{гущина}$$

інших джерел тепла, h – коефіцієнт теплообміну, $\theta(x, t)$ – температура зовнішнього середовища.

Щоб отримати єдиний розв’язок рівняння теплопровідності треба доєднати початкові і граничні умови.

Початкова умова на відміну від рівняння гіперболічного типу має вигляд $u(x, t_0) = \varphi(x)$.

Граничні умови:

$$1) \quad u(0, t_0) = \mu(t).$$

На кінці стрижня $x = 0$ задана температура $\mu(t)$ – функція, $t \in [t_0; T]$, T – проміжок часу, при якому вивчається процес;

$$2) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t).$$

На кінці стрижня $x = l$ задана швидкість теплової течії, що протікає крізь торцевий переріз стрижня.

$$3) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda \cdot (u(l, t) - \theta(t)).$$

На кінці стрижня l задане лінійно співвідношення між похідною функції та функцією.

$\lambda = \frac{h}{k}$ – коефіцієнт теплообміну, $\theta(t)$ – деяка відома функція.

Тема 10. Перша крайова задача для рівняння теплопровідності на відрізьку $[0, l]$. Метод Фур'є

Маємо неоднорідне рівняння

$$\begin{aligned} u_t' &= a^2 \cdot u_{xx}'' + f(x, t), \\ 0 < x < l, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (10.1)$$

з початковою умовою

$$u'(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l] \quad (10.2)$$

і граничними умовами

$$u(0, t) = \mu_1(t), \text{ і } u(l, t) = \mu_2(t), \text{ де } t \geq 0. \quad (10.3)$$

Вивчення загальної першої крайової задачі почнемо з розв'язування наступної задачі: знайти неперервний в замкненої області $(0 \leq x \leq l, \quad t \in [0; T])$ розв'язок однорідного рівняння

$$u_t' = a^2 \cdot u_{xx}'', \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (10.4)$$

що задовольняє початковій умові $u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0; l]$, однорідним граничним умовам

$$u(0, t) = 0, \quad u(l; t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (10.5)$$

Розв'язування починаємо з розгляду цієї задачі: дано рівняння $u_t' = a^2 \cdot u_{xx}''$, шукаємо функцію $u(x, t)$, що не дорівнює тотожно 0, задовольняє однорідним крайовим умовам $u(0, t) = 0, \quad u(l; t) = 0$.

Розв'язок представимо у вигляді

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (10.6)$$

Підставимо форму розв'язку (10.6) в рівняння (10.4):

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t),$$

Ділімо ліву та праву частину останньої рівності на $a^2 \cdot X(x) \cdot T(t)$, маємо:

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0,$$

$$T'(t) - \lambda \cdot a^2 \cdot T(t) = 0,$$

з граничних умов (10.5) випливає $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Маємо задачу про пошук власних значень (задача Штурма-Ліувілля):

$$X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0,$$

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння: $r^2 - \lambda = 0$, $r_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$.

$$X(x) = C_1 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} \cdot x} + C_2 \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot x},$$

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1.$$

$$X(x) = C_1 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} \cdot x} - C_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot x} = C_1 \cdot 2 \cdot i \cdot \frac{e^{-\sqrt{\lambda} \cdot x} - e^{\sqrt{\lambda} \cdot x}}{2 \cdot i} = i \cdot 2 \cdot C_1 \cdot \sin(i \cdot \sqrt{\lambda} \cdot x).$$

$$X(l) = C_1 \cdot (e^{-\sqrt{\lambda} \cdot l} - e^{\sqrt{\lambda} \cdot l}) = 0, \quad C_1 \neq 0, \Rightarrow 1 - e^{2\sqrt{\lambda} \cdot l} = 0 \Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda} \cdot l} = 1,$$

$$e^{2\sqrt{\lambda} \cdot l} = e^{i \cdot 2\pi k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$2\sqrt{\lambda} \cdot l = i \cdot 2\pi k, \quad \sqrt{\lambda} = i \cdot \frac{\pi k}{l},$$

$$\lambda_k = -\frac{\pi^2 k^2}{l^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right).$$

Розв'язок задачі Штурма-Ліувілля має вигляд:

$$\begin{cases} X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right), \\ \lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2. \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\dot{T}(t) - \lambda \cdot a^2 \cdot T(t) = 0,$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = \lambda \cdot a^2 \cdot T(t),$$

$$\int \frac{dT(t)}{dt} = \int \lambda \cdot a^2 \cdot T(t),$$

$$\ln|T(t)| = \lambda \cdot a^2 \cdot t + C,$$

$$T_k(t) = C_k \cdot e^{\lambda_k \cdot a^2 \cdot t}$$

$$u_k(x, t) = C_k \cdot e^{-\left(\frac{\pi \cdot k \cdot a}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right).$$

Функції $u_k(x, t)$, де $k = 1, 2, \dots$ є частинними розв'язками рівняння (10.4) з граничними умовами (10.5).

Тоді

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot e^{-\left(\frac{\pi \cdot k \cdot a}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right).$$

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) = \varphi(x).$$

За початковою умовою $u(x, 0) = \varphi(x)$. Власних функцій $X_k(x)$ лічильна множина.

Вони створюють повну систему функцій в $L^2[a, b]$. Також ці функції створюють ортогональну систему.

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot X_k(x) \quad \cdot (X_n(x))$$

$$\int_0^l \varphi(x) \cdot X_n(x) dx = \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot X_k(x) \cdot X_n(x) dx$$

$$\int_0^l \varphi(x) \cdot X_n(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \int_0^l X_k(x) \cdot X_n(x) dx$$

$$\int_0^l \varphi(x) \cdot X_n(x) dx = C_n \cdot \int_0^l X_n^2(x) dx,$$

$$C_n = \frac{\int_0^l \varphi(x) \cdot X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx}.$$

$$\text{Маємо } X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l (1 - \cos \frac{2\pi n x}{l}) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{2}{2\pi n} \cdot \sin \frac{2\pi n x}{l} \right) \Big|_0^l = \frac{l}{2}.$$

Маємо $C_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} \cdot dx$. Величини C_n є коефіцієнтами Фур'є функції

$\varphi(x)$ при розвиненні її в ряд за синусами на інтервалі $(0, l)$.

Розв'язок задачі: знайти функцію $u(x, t)$, що задовольняє однорідному рівнянню та умовам

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}, \quad 0 < x < l, t \in [0, T],$$

$$T > 0.$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

має вигляд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right),$$

$$\text{де } C_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} \cdot dx \quad \forall t > 0.$$

Завдання для самостійного виконання

Задача 1. Знайти розв'язок рівняння $u_t' = a^2 \cdot u_{xx}''$, $0 < x < l$, $0 \leq t \leq T$, для якого виконуються початкові умови $u(x, 0) = x \cdot (l - x)$ і граничні умови $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$.

Задача 2. Знайти розв'язок рівняння $u'_t = a^2 \cdot u''_{xx}$, $0 < x < l$, $0 \leq t \leq T$, для якого

виконуються початкові умови $u(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{l}{2}, \\ l - x, & \text{якщо } \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$ і граничні умови

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

Задача 3. Знайти розв'язок рівняння $u'_t = a^2 \cdot u''_{xx}$, $0 < x < l$, $0 \leq t \leq T$, якщо початковий розподіл температури визначається рівністю $u(x, 0) = u_0$, де $u_0 = \text{const}$, і задовольняє граничним умовам $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$.

Задача 4. Знайти розв'язок рівняння $u'_t = a^2 \cdot u''_{xx}$, $0 < x < l$, $0 \leq t \leq T$, для якого

виконуються початкові умови $u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{l}{2}, \\ 0, & \text{якщо } \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$, де $u_0 = \text{const}$ і

граничні умови $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$.

Задача 5. Знайти розв'язок рівняння $u'_t = a^2 \cdot u''_{xx}$, $0 < x < l$, $0 \leq t \leq T$, для якого

виконуються початкові умови $u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2}{l} \cdot x, & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{2}{l} \cdot (l - x), & \text{якщо } \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$ і граничні

умови $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$.

Тема 11. Неоднорідне рівняння теплопровідності

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$u_t' = a^2 \cdot u_{xx}'' + f(x, t) \quad (11.1)$$

з початковою умовою

$$u(x, 0) = 0, \quad (11.2)$$

і граничними умовами

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (11.3)$$

Шукаємо розв'язок задачі (11.1-11.3) у вигляді ряду Фур'є за власними функціями $\left\{ \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \right\}$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad t > 0.$$

Треба знайти функції $u_n(t)$. Для цього розвинемо функцію $f(x, t)$ в ряд Фур'є

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \text{де } f_n(t) = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi.$$

Підставимо $u(x, t)$ і $f(x, t)$ в рівняння (11.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_n'(t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} + a^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} u_n(t) \cdot \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l} \cdot \left[u_n'(t) + a^2 \cdot u_n(t) \cdot \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - f_n(t) \right] = 0.$$

Маємо

$$u_n'(t) + a^2 \cdot u_n(t) \cdot \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - f_n(t) = 0. \quad (11.4)$$

$$0 = u(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} u_n(0) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} \Rightarrow u_n(0) = 0. \quad (11.5)$$

$$u_n'(t) + u_n(t) \cdot \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 = f_n(t).$$

Відповідне однорідне рівняння має вигляд

$$\frac{u_n(t)}{dt} = -\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \cdot u_n(t), \quad (11.4')$$

$$\int \frac{du_n}{u_n} = -\int \left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \cdot dt,$$

$$\ln|u_n| = -\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \cdot t + C,$$

$$u_n(t) = e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot C_n,$$

Використовуємо метод варіації довільних сталих для пошуку функцій $u_n(t)$

$$u_n(t) = C_n(t) \cdot e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \cdot t}, \text{ де } C_n(t) \text{ – шукана функція.}$$

Маємо

$$C'_n(t) \cdot e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \cdot t} + C_n(t) \cdot \left(-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2\right) \cdot e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \cdot t} + \left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \cdot C_n(t) \cdot e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \cdot t} = f_n(t),$$

$$C'_n(t) = f_n(t) \cdot e^{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \cdot t},$$

$$dC_n(t) = f_n(t) \cdot e^{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot dt,$$

$$C_n(t) = \int_0^t f_n(\tau) \cdot e^{\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \cdot \tau} \cdot d\tau,$$

$$u_n(t) = \int_0^t f_n(\tau) \cdot e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \cdot (t-\tau)} \cdot d\tau.$$

Розв'язок задачі (11.1–11.3) має вигляд

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_0^t f_n(\tau) \cdot e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 \cdot (t-\tau)} \cdot d\tau \right] \cdot \sin \frac{\pi nx}{l}.$$

Завдання для самостійного розв'язування

Задача 1. Знайти розв'язок неоднорідного рівняння $u'_t = a^2 \cdot u''_{xx} + f(x, t)$ з початковою умовою $u(x, 0) = 0$ і граничними умовами $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$.

Задача 2. Знайти розв'язок неоднорідного рівняння $u'_t = a^2 \cdot u''_{xx} + f(x, t)$ з початковою умовою $u(x, 0) = 0$ і граничними умовами $u(0, t) = u_x(l, t) = 0$.

Задача 3. Знайти розв'язок неоднорідного рівняння $u'_t = a^2 \cdot u''_{xx} + f(x, t)$ з початковою умовою $u(x, 0) = 0$ і граничними умовами $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$.

Задача 4. Знайти розв'язок неоднорідного рівняння $u'_t = a^2 \cdot u''_{xx} + f(x, t)$ з початковою умовою $u(x, 0) = u_0$, де $u_0 = \text{const}$, і граничними умовами $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$.

Задача 5. Знайти розв'язок неоднорідного рівняння $u'_t = a^2 \cdot u''_{xx} + 2$ з початковою умовою $u(x, 0) = x$ і граничними умовами $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Тема 12. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності на відрізку $[0; l]$

Розглянемо загальну першу крайову задачу для рівняння теплопровідності

$$u'_t = a^2 \cdot u''_{xx} + f(x, t), \quad (12.1)$$

з додатковими умовами

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (12.2)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases} \quad (12.3)$$

Вводимо нову невідому функцію $v(x, t)$

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t),$$

що представляє собою відхилення від певної відомої функції $w(x, t)$. Функція $v(x, t)$ буде визначатися як розв'язок рівняння

$$v'_t = a^2 \cdot v''_{xx} + [f(x, t) - (w'_t - a^2 \cdot w''_{xx})] \quad (12.4)$$

з додатковими умовами

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \varphi(x) - w(x, 0), \\ v(0, t) &= \mu_1(t) - w(0, t), \\ v(l, t) &= \mu_2(t) - w(l, t). \end{aligned} \quad (12.5)$$

$$\text{Обираємо функцію } v(x, t) \text{ таким чином, щоб } v(0, t) = v(l, t) = 0. \quad (12.6)$$

Функція $v(x, t)$ – розв'язок задачі (12.4 – 12.6).

Функцію $w(x, t)$ обираємо таким чином, щоби $w(0, t) = \mu_1(t)$, $w(l, t) = \mu_2(t)$.

Отже, $w(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} \cdot (\mu_2(t) - \mu_1(t))$. Пояснимо вид отриманої функції $w(x, t)$,

маємо

$$w''_{xx}(x, t) = 0,$$

$$w(0, t) = \mu_1(t), \quad w(l, t) = \mu_2(t).$$

$$w'_x(x, t) = A(t) \Rightarrow w(x, t) = A(t) \cdot x + B(t).$$

$$w(0,t) = B(t) = \mu_1(t),$$

$$w(l,t) = A(t) \cdot l + \mu_1(t) = \mu_2(t) \Rightarrow A(t) = (\mu_2(t) - \mu_1(t)) \cdot \frac{1}{l},$$

$$w(x,t) = \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l} \cdot x + \mu_1(t).$$

Приклад. Початкова температура стрижня $u(x,0) = u_0 = \text{const}$ якщо $0 < x < l$. Температура кінців підтримується сталою $u(0,t) = u_1$, $u(l,t) = u_2$ при $t > 0$. Знайти температуру стрижня, якщо теплообмін на бічній поверхні відсутній. Знайти стаціонарну температуру.

Розв'язування: $u'_t = a^2 \cdot u''_{xx}$,

$$u(x,0) = u_0 = \text{const}, \quad x \in [0;l]$$

$$t > 0, \quad u(0,t) = u_1, \quad u(l,t) = u_2.$$

Вводимо нову невідому функцію $v(x,t)$, тоді $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$, де $w(x,t)$ – стаціонарна температура, $v(x,t)$ – відхилення від стаціонарної температури. Функція $v(x,t)$ є розв'язком рівняння $v'_t = a^2 \cdot v''_{xx} - (w'_t - a^2 \cdot w''_{xx})$ з додатковими умовами

$$v(x,0) = u_0 - w(x,0),$$

$$v(0,t) = u_1 - w(0,t),$$

$$v(l,t) = u_2 - w(l,t).$$

Причому $v(0,t) = v(l,t) = 0$. Тоді $w(0,t) = u_1$, $w(l,t) = u_2$.

$$\text{Маємо } w(x,t) = u_1 + \frac{x}{l} \cdot (u_2 - u_1).$$

$$\text{Умова } w''_{xx}(x,t) = 0, \quad w'_x(x,t) = A(t) \Rightarrow w(x,t) = A(t) \cdot x + B(t).$$

$$w(0,t) = B(t) = u_1, \quad w(l,t) = A(t) \cdot l + u_1 = u_2, \quad \text{тоді } A(t) = \frac{u_2 - u_1}{l}.$$

$$w(x,t) = u_1 + \frac{x}{l} \cdot (u_2 - u_1), \quad \text{що вже і написано.}$$

Шукаємо $v(x,t)$, що задовольняє рівнянню $v'_t = a^2 \cdot v''_{xx}$ та додатковим умовам

$$v(x,0) = u_0 - u_1 - \frac{x}{l}(u_2 - u_1),$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0.$$

Застосовуємо метод розподілу змінних. Задача про пошук власних значень і функцій дає результат

$$\begin{cases} X_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{l}, \\ \lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \end{cases} \quad k=1,2,\dots$$

$$v(x,t) = X(x) \cdot T(t),$$

$$T_k(t) = C_k \cdot e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 \cdot t},$$

$$v_k(x,t) = C_k \cdot e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot \sin \frac{\pi k x}{l},$$

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot \sin \frac{\pi k x}{l}$$

$$v(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} = a + bx,$$

$$\text{де } a = u_0 - u_1, \quad b = -\frac{u_2 - u_1}{l},$$

$$C_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l (a + bx) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} \cdot dx.$$

Застосовуємо інтегрування частинами на відрізку

$$\int_0^l \alpha(x) \cdot d\beta(x) = \alpha(x) \cdot \beta(x) \Big|_0^l - \int_0^l \beta(x) d\alpha(x).$$

В нашому випадку

$$a + bx = \alpha(x),$$

$$d\beta(x) = \sin \frac{\pi kx}{l} \cdot dx,$$

$$\text{Маємо } d\alpha(x) = b \cdot dx, \quad \beta(x) = -\frac{l}{\pi k} \cos \frac{\pi kx}{l}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{2}{l} \cdot \left(-\frac{l}{\pi k} \cdot (a + bx) \cos \frac{\pi kx}{l} \Big|_0^l - \int_0^l \left(-\frac{l}{\pi k} \right) \cdot b \cdot \cos \frac{\pi kx}{l} \cdot dx \right) = \\ &= \frac{2}{l} \cdot \left(-\frac{l}{\pi k} \cdot [(a + bl) \cos \pi k - a] + \frac{bl}{\pi k} \cdot \frac{l}{\pi k} \cdot \sin \frac{\pi kx}{l} \Big|_0^l \right) = \\ &= -\frac{2}{\pi k} \cdot ((a + bl) \cdot (-1)^k - a). \end{aligned}$$

Розв'язок прикладу має вигляд:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_1 + \frac{x}{l} \cdot (u_2 - u_1) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot e^{-\frac{\pi k a}{l} \cdot t} \cdot \sin \frac{\pi kx}{l}, \text{ де} \\ C_k &= -\frac{2}{\pi k} \cdot ((u_0 - u_1 - u_2 + u_1) \cdot (-1)^k - (u_0 - u_1)) = \\ &= -\frac{2}{\pi k} \cdot ((u_0 - u_2) \cdot (-1)^k - (u_0 - u_1)). \end{aligned}$$

Завдання для самостійного виконання

Задача. Початкова температура стрижня $u(x, 0) = u_1 = \text{const}$ при $0 < x < l$. Температура лівого кінця підтримується сталою $u(0, t) = u_2 = \text{const}$. Другий кінець стрижня теплоізований $\left(\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0 \right)$. Знайти температуру стрижня, якщо на боковій поверхні є теплообмін з зовнішнім середовищем, температура якого стала і дорівнює u_0 . Знайти стаціонарну температуру.

Тема 13. Поширення тепла на нескінченну пряму

Розглянемо на нескінченній прямій задачу з початковими даними (задачу Коші): знайти обмежену функцію $u(x, t)$, що визначена в області $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$ і задовольняє рівнянню теплопровідності

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx} \quad (13.1)$$

і початковій умові

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (13.2)$$

Покажемо спочатку формальну схему розв'язування поставленої задачі, що базується на розподілу змінних. Будемо шукати обмежений нетривіальний розв'язок рівняння (13.1), що представимо у вигляді добутку:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (13.3)$$

Підставляємо (13.3) в (13.1):

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t),$$

ділимо ліву та праву частину на вираз $a^2 \cdot X(x) \cdot T(t)$, маємо

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Аналізуючи ліву та праву частину рівності, можна записати

$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = C$, де C – параметр розподілу. Звідси випливає

$$X''(x) - C \cdot X(x) = 0, \quad (13.4)$$

$$T'(t) - C \cdot a^2 \cdot T(t) = 0. \quad (13.5)$$

З (13.5) маємо $\frac{dT(t)}{T(t)} = C \cdot a^2 \cdot dt$, інтегруємо ліву та праву частину і отримуємо

$$\ln T(t) = C \cdot a^2 \cdot t + D_1, \quad D_1 = \text{const},$$

$$T(t) = e^{C \cdot a^2 \cdot t} \cdot D, \quad D = e^{D_1}.$$

Температура ні в одному перерізі стрижня не може необмежене зростати при $-\infty < x < +\infty$, тоді параметр C треба обрати у вигляді $-\lambda^2$. Отже маємо

$T(t) = e^{-\lambda^2 \cdot a^2 \cdot t} \cdot D$. Рівняння (13.4) має вигляд $X''(x) + \lambda^2 \cdot X(x) = 0$, відповідне характеристичне рівняння має вигляд $r^2 + \lambda^2 = 0$, $r^2 = -\lambda^2$, $r_{1,2} = \pm i \cdot \lambda$.

$$X(x) = N \cos \lambda x + M \sin \lambda x.$$

Величини D , N , M – довільні сталі, $-\infty < \lambda < +\infty$. Отримуємо сім'ю функцій $u_\lambda(x, t)$, що залежать від параметра λ

$$u_\lambda(x, t) = e^{-\lambda^2 \cdot a^2 \cdot t^2} \cdot (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x).$$

Маємо безліч частинних розв'язків рівняння (13.1). Функція

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 \cdot a^2 \cdot t^2} \cdot (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) \cdot d\lambda \quad (13.6)$$

є розв'язком рівняння (13.1) як суперпозиція частинних розв'язків цього рівняння. Інтеграл (13.6) є збіжним, його можна двічі про диференціювати за змінною x та один раз – за змінною t . Вирази $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ шукаємо за допомогою початкової умови (13.2).

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) \cdot d\lambda = \varphi(x), \quad (13.7)$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda \xi \cdot d\xi, \quad (13.8)$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda \xi \cdot d\xi,$$

якщо уявити, що маємо запис у формі інтеграла Фур'є для функції $\varphi(x)$ у (13.7).

Перетворимо запис інтегралу в функції (13.6)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 \cdot a^2 \cdot t^2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda \xi \cdot d\xi \right) \cos \lambda x + \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda \xi \cdot d\xi \right) \sin \lambda x \right) \cdot d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \cdot e^{-(\lambda a)^2 \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot (\cos \lambda \xi \cdot \cos \lambda x + \sin \lambda \xi \sin \lambda x) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \cdot e^{-(\lambda a)^2 \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \cos[\lambda(\xi - x)] d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \cdot \varphi(\xi) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\lambda a)^2 \cdot t} \cdot \cos[\lambda(\xi - x)] d\lambda = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \cdot \varphi(\xi) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-(\lambda a)^2 \cdot t} \cdot \cos[\lambda(\xi - x)] + i \cdot e^{-(\lambda a)^2 \cdot t} \cdot \sin[\lambda(\xi - x)] \right) \cdot d\lambda = \\
&= \left\{ \text{функція } e^{-(\lambda a)^2 \cdot t} \cdot \sin[\lambda(\xi - x)] \text{ є непарною при } -\infty < \lambda < +\infty \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \cdot \varphi(\xi) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\lambda a)^2 \cdot t} \cdot e^{i \cdot \lambda(\xi - x)} d\lambda = \\
&= \left\{ \begin{aligned} &i\lambda \cdot (\xi - x) - (\lambda a)^2 \cdot t = \\ &= -a^2 t \left(\lambda^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{i \cdot (\xi - x)}{a^2 t} \cdot \lambda + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{i \cdot (\xi - x)}{a^2 t} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{i \cdot (\xi - x)}{a^2 t} \right)^2 \right) = \\ &= -a^2 t \left(\lambda - \frac{1}{2} \cdot \frac{i \cdot (\xi - x)}{a^2 t} \right)^2 + a^2 t \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{i^2 \cdot (\xi - x)^2}{(a^2 t)^2} = \\ &= -a^2 t \left(\lambda - \frac{1}{2} \cdot \frac{i \cdot (\xi - x)}{a^2 t} \right)^2 - \frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t} \end{aligned} \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \cdot \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t \left[\lambda - \frac{i \cdot (\xi - x)}{2a^2 t} \right]^2} \cdot d\lambda = \\
&= \left\{ \text{інтеграл Пуассона } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t \left[\lambda - \frac{i \cdot (\xi - x)}{2a^2 t} \right]^2} d\lambda = \sqrt{\pi} \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{a \cdot \sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \cdot d\xi = \frac{1}{2a \cdot \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \cdot d\xi.
\end{aligned}$$

Позначимо функцію $G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a \cdot \sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}$, її часто називають

фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності [6]. Тоді розв'язок рівняння (13.1) з початковими умовами (13.2) має вигляд

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \cdot \varphi(\xi) \cdot d\xi. \text{ Функція } G(x, \xi, t - t_0) = \frac{Q}{2a \cdot c \cdot \rho \cdot \sqrt{\pi(t - t_0)}} \cdot e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2(t - t_0)}}$$

показує температуру в точці x в момент часу t , якщо в початковий момент часу $t = t_0$ в точці ξ виділяється кількість тепла $Q = c \cdot \rho$ [6].

Тема 14. Рівняння еліптичного типу. Рівняння Лапласа і Пуассона. Метод Фур'є для рівняння Лапласа. Задача Діріхле для кола

При дослідженні стаціонарних процесів різної фізичної природи (коливання, теплопровідність, дифузія і інше) звичайно приходять до рівнянь еліптичного типу.

Наприклад, розглянемо стаціонарне теплове поле. Температура нестационарного теплового поля задовольняє диференціальному рівнянню теплопровідності $u'_t = a^2 \cdot u''_{xx}$ або $u'_t = a^2 \cdot \Delta u$, де $a^2 = \frac{k}{c \cdot \rho}$ – коефіцієнт температуропровідності (Тема 9). Якщо процес стаціонарний, тоді встановлюється розподіл температури $u(x, y, z)$, що не змінюється з часом і, отже, задовольняє рівнянню Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (14.1)$$

Якщо маємо джерело тепла, тоді отримуємо рівняння

$$\Delta u = -f, \quad (14.2)$$

де $f = \frac{F}{k}$, F – густина теплових джерел, k – коефіцієнт теплопровідності.

Неоднорідне рівняння Лапласа (14.2) називають рівнянням Пуассона. Функцію u називають гармонійною в області D , якщо вона неперервна в цій області і задовольняє рівнянню Лапласа (14.1).

Розглянемо деякий об'єм D , що обмежений поверхнею σ . Задача про стаціонарний розподіл температури $u(x, y, z)$ в тілі D сформулюється наступним чином: знайти функцію $u(x, y, z)$, що задовольняє в D рівнянню $\Delta u = -f(x, y, z)$ і граничній умові, що може бути взятою в одному з наступних виглядів:

- 1) $u = f_1$ на поверхні σ (перша крайова задача),
- 2) $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ на поверхні σ (друга крайова задача),
- 3) $\frac{\partial u}{\partial n} + h \cdot (u - f_3) = 0$ на поверхні σ (третя крайова задача), де f_1, f_2, f_3 – задані

функції, $\frac{\partial u}{\partial n}$ – похідна функції u за зовнішньою нормаллю до поверхні σ .

Очевидно, що стаціонарний розподіл температури може встановлюватися лише за умови рівності 0 сумарної течії тепла через межу області. Звідси випливає, що функція f_2 повинна задовольняти додатковій вимоги $\iint_{\sigma} f_2 \cdot d\sigma = 0$.

Першу крайову задачу для рівняння Лапласа називають задачею Діріхле, а другу крайову задачу – задачею Неймана. Якщо шукаємо розв’язок в області T_0 , що є внутрішньою (або зовнішньою) щодо поверхні σ , тоді відповідну задачу називають внутрішньою (або зовнішньою) крайовою задачею.

В якості другого прикладу розглянемо потенціальну течію рідини без джерел ($\operatorname{div} v = 0$). Нехай в деякому об’ємі D з межею σ є місце стаціонарної течії нестислої рідини (густина $\rho = \text{const}$), що характеризується швидкістю $v(x, y, z)$. Якщо течія рідини не є вихровою, тоді швидкість $v(x, y, z)$ є потенціальним вектором

$$v = -\operatorname{grad} \varphi, \text{ де } \varphi - \text{скалярна функція}, \quad (14.3)$$

що називається потенціалом швидкості. А якщо джерела відсутні, тоді

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (14.4)$$

Підставляємо в (14.4) вираз (14.3) для $v(x, y, z)$, тоді маємо $\operatorname{div} \operatorname{grad} v = 0$ або $\Delta \varphi = 0$, тобто потенціал швидкості задовольняє рівнянню Лапласа.

Задача Діріхле для кола

$$1) \text{ Знайти } 2\pi\text{-періодичний розв’язок даного рівняння } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (14.5)$$

Розв’язування: розв’язок будемо шукати у вигляді добутку двох функцій $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Зробимо заміну змінних $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, тоді рівняння

$$(14.5) \text{ має вигляд } \rho^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Розв’язок шукаємо у вигляді $u(\rho, \varphi) = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi)$, де $u(\rho, \varphi) = u(\rho, \varphi + 2\pi)$.

Підставимо даний розв’язок в рівняння (14.5)

$$\rho^2 \cdot R''(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + \rho \cdot R'(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + R(\rho) \cdot \Phi''(\varphi) = 0,$$

$$\Phi(\varphi) \cdot (\rho^2 \cdot R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho)) = -R(\rho) \cdot \Phi''(\varphi),$$

ділимо ліву та праву частини на вираз $R(\rho) \cdot \Phi(\varphi)$, отримуємо

$$\frac{\rho^2 \cdot R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Аналізуючи ліву та праву частини останньої рівності, напишемо

$$\frac{\rho^2 \cdot R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = C, \text{ де } C = \text{const.}$$

Отже, маємо

$$\rho^2 \cdot R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho) - C \cdot R(\rho) = 0,$$

$$\Phi''(\varphi) + C \cdot \Phi(\varphi) = 0.$$

Шукаємо розв'язки диференціального рівняння другого порядку

$$\Phi''(\varphi) + C \cdot \Phi(\varphi) = 0,$$

$$k^2 + C = 0,$$

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{-C},$$

розглянемо випадки значень сталої C , пам'ятаємо, що $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$.

1) $C < 0$, характеристичне рівняння має корені k_1, k_2 , що різні і дійсні. Тоді $\Phi(\varphi) = C_1 \cdot e^{-\sqrt{-C} \cdot \varphi} + C_2 \cdot e^{\sqrt{-C} \cdot \varphi}$, $C_1, C_2 - \text{const}$, маємо 2π -неперіодичну функцію.

2) $C = 0$, тоді $\Phi''(\varphi) = 0$, $C_1, C_2 - \text{const}$, маємо 2π -неперіодичну функцію, якщо $C_1 \neq 0$.

3) $C > 0$, нехай $C = \lambda^2$, тоді $\Phi(\varphi) = C_1 \cdot \cos \lambda \varphi + C_2 \cdot \sin \lambda \varphi$, $C_1, C_2 - \text{const}$, період даної функції $T = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\lambda = 1, 2, 3, \dots$.

Позначимо $\lambda = n$, тоді

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cdot \cos n\varphi + C_2 \cdot \sin n\varphi, n = 0, 1, 2, 3, \dots, C = n^2.$$

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку $\rho^2 \cdot R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho) - n^2 \cdot R(\rho) = 0$ при $n = 0$. Зробимо заміну змінної $z(\rho) = R'(\rho)$, тоді маємо

$$\rho^2 \cdot z'(\rho) + \rho \cdot z(\rho) = 0,$$

$$\frac{dz}{d\rho} = -\frac{z}{\rho},$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{d\rho}{\rho},$$

$$\ln|z| = -\ln|\rho| + \ln|D|,$$

$$z = \frac{D}{\rho}, \text{ де } D = \text{const.}$$

$$\frac{dR_0}{d\rho} = \frac{D}{\rho},$$

$$dR_0 = D \cdot \frac{d\rho}{\rho},$$

$$R_0(\rho) = D \cdot \ln \rho + K, K = \text{const.}$$

Розглянемо випадки $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\rho^2 \cdot R_n''(\rho) + \rho \cdot R_n'(\rho) - n^2 \cdot R_n(\rho) = 0, \quad (14.6)$$

1) спосіб розв'язування: заміна $\rho = e^t$, t – незалежна змінна.

2) спосіб розв'язування: $R(\rho) = \rho^k$, $R'(\rho) = k \cdot \rho^{k-1}$, $R''(\rho) = k^2 \cdot \rho^{k-2}$.

Продовжимо розв'язування рівняння (14.6) другим способом. Маємо:

$$k \cdot (k-1) \cdot \rho^k + k \cdot \rho^k - n^2 \cdot \rho^k = 0,$$

$$k^2 - n^2 = 0,$$

$$k = \pm n.$$

Отже, $R_1(\rho) = \rho^n$, $R_2(\rho) = \rho^{-n}$, ці функції лінійно незалежні.

$R_n(\rho) = F_n \cdot \rho^n + G_n \cdot \rho^{-n}$, $F_n, G_n = \text{const.}$ При $n = 0$

$$u_0(\rho, \varphi) = R_0(\rho) \cdot \Phi_0(\varphi) = C_1 \cdot (D \cdot \ln \rho + K) = A_0 \ln \rho + B_0,$$

де $A_0 = C_1 \cdot D$, $B_0 = C_1 \cdot K$.

При $n = 1, 2, 3, \dots$

$$u_n(\rho, \varphi) = R_n(\rho) \cdot \Phi_n(\varphi) = (F_n \cdot \rho^n + G_n \cdot \rho^{-n}) \cdot (C_1 \cdot \cos n\varphi + C_2 \cdot \sin n\varphi),$$

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n \cdot (A_n \cdot \cos n\varphi + B_n \cdot \sin n\varphi) + \rho^{-n} \cdot (M_n \cdot \cos n\varphi + N_n \cdot \sin n\varphi),$$

де $A_n = C_1 \cdot F_n$, $B_n = C_2 \cdot F_n$, $M_n = C_1 \cdot G_n$, $N_n = C_2 \cdot G_n$.

2π -періодичний розв'язок рівняння (14.5) має вигляд

$$u(\rho, \varphi) = A_0 \ln \rho + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cdot (A_n \cdot \cos n\varphi + B_n \cdot \sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} \cdot (M_n \cdot \cos n\varphi + N_n \cdot \sin n\varphi). \quad (14.7)$$

Сформулюємо внутрішню задачу Діріхле для кола:

знайти двічі неперервне диференційовану функцію $u(x, y)$, що є розв'язком

$$\text{рівняння } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1) в середині кола даного радіуса $x^2 + y^2 < a^2$, $a > 0$;

2) в замкненій області $x^2 + y^2 \leq a^2$, $a > 0$;

3) і задовольняє умові $u(x, y)|_{x^2+y^2=a^2} = f(x, y)|_{x^2+y^2=a^2}$, в полярній системі координат

$$u(a, \varphi) = f(\varphi).$$

Розв'язком задачі Діріхле повинна бути 2π -періодична функція, тоді функція (14.7) при $A_0 = 0$, $M_n = N_n = 0$ має вигляд

$$u(\rho, \varphi) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cdot (A_n \cdot \cos n\varphi + B_n \cdot \sin n\varphi).$$

Обираємо коефіцієнти таким чином, щоб виконувались крайові умови

$$u(a, \varphi) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot (A_n \cdot \cos n\varphi + B_n \cdot \sin n\varphi) = f(\varphi). \text{ Розвинемо функцію } f(\varphi) \text{ за}$$

функціями $\cos n\varphi$ і $\sin n\varphi$, тоді

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi,$$

$$A_n = \frac{1}{a^n \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \cos n\varphi \cdot d\varphi,$$

$$B_n = \frac{1}{a^n \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \sin n\varphi \cdot d\varphi.$$

Сформулюємо зовнішню задачу Діріхле для кола: знайти двічі неперервно диференційовану функцію $u(x, y)$, що є розв'язком рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

- 1) зовні кола даного радіуса $x^2 + y^2 > a^2, a > 0$;
- 2) в області $x^2 + y^2 \geq a^2, a > 0$;
- 3) і задовольняє умові $u(x, y)|_{x^2+y^2=a^2} = f(x, y)|_{x^2+y^2=a^2}$ на межі кола;
- 4) і обмежена на нескінченості, тобто $|u(x, y)| < C, C - \text{const}$ для будь-якої точки (x, y) з області визначення.

Розв'язком цієї задачі можна записати наступну функцію $u(\rho, \varphi) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} \cdot (M_n \cdot \cos n\varphi + N_n \cdot \sin n\varphi)$, тобто для функції (14.7) маємо $A_0 = 0, A_n = B_n = 0$. Обираємо коефіцієнти таким чином, щоб виконувались крайові умови $u(a, \varphi) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} \cdot (M_n \cdot \cos n\varphi + N_n \cdot \sin n\varphi) = f(\varphi)$. Розвинемо функцію $f(\varphi)$ за функціями $\cos n\varphi$ і $\sin n\varphi$, тоді

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi,$$

$$M_n = \frac{a^n}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \cos n\varphi \cdot d\varphi,$$

$$N_n = \frac{a^n}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \sin n\varphi \cdot d\varphi.$$

Література

1. Диференціальні рівняння: теорія, приклади, розв'язання : навч. посіб. / Т.С. Кагадій, Л.Ф. Сушко, І.В. Щербина, О.Д. Онопрієнко, А.Г. Шпорта; М-во освіти і науки України; Дніпров. держ. аграр.-екон. ун-т. – Дніпро : ДДАЕУ, 2022. – 190 с. – Режим доступу : <https://dspace.dsau.dp.ua/handle/123456789/7936>.
2. Функція. Границя. Обчислення границь функції: методичні рекомендації до практичних занять з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 «Прикладна математика» : [Електронний ресурс] / О.О. Сдвижкова, Д.В. Бабець, С.Є. Тимченко, Д.В. Клименко; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 42 с. Режим доступу: <https://vm.nmu.org.ua/libr/metod/113-funkcja,%20granycja.pdf>.
3. Панченко Н.Г. Вища математика : навч. посіб. \ Н.Г. Панченко, М.Є. Резуненко. – Харків : УкрДУЗТ, 2022. – Ч. 1. – 231 с.
4. Грудкіна Н.С. Рівняння математичної фізики : посібник до практичних занять і самостійної роботи [Електронний ресурс] / Н.С. Грудкіна, С.О. Шевцов. – Краматорськ : М-во освіти і науки України, Донбас. держ. машинобуд. акад., 2019. – Ч. I. – 47 с. Режим доступу: http://www.dgma.donetsk.ua/metod/vm/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%B2%D0%BA%D0%B0%D0%B7%D1%96%D0%B2%D0%BA%D0%B8_%D0%A0%D0%9C%D0%A4.pdf.
5. Ловейкін А. Рівняння математичної фізики: приклади і задачі : навч. посіб. для студ. механіко-мат. ф-ту [Електронний ресурс] / А. Ловейкін, Є. Вакал. – Київ : КНУ ім. Т. Шевченко, 2024. – 187 с. Режим доступу: https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2024/05/rmf_posibnyk.pdf.
6. Strauss W.A. Partial Differential Equations. An introduction. [Електронний ресурс], 466 p. Режим доступу: https://www.ime.usp.br/~kuhl/map2320/Strauss_Pdes2ndEd.pdf.

Навчальне видання

Клименко Діна Володимирівна
Тимченко Світлана Євгенівна
Головко Юрій Миколайович

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Навчальний посібник

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс.
Підписано до видання 25.04.2025. Авт. арк. 6,5.

Підготовлено до видання
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.